Delo

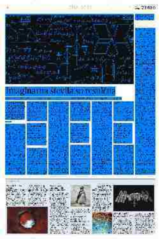
Država: Slovenija

Stran: 14

Površina: 1.187 cm^2

06.01.2022

Četrtek



Imaginarna števila so resnična

Matematika *V svetu kvantne mehanike obstajajo tudi imaginarna števila – A zakaj je svet kompleksen in ne realen*

Med matematičnimi objekti so imaginarna števila v zgodovini naredila nadpovprečno veliko piruet. Od nepoznavanja njihovega obstoja, ki je trajalo prvih nekaj tisoč let matematike, so prepotovala od opozorila za neobstoj rešitve, prek zloma geometrije in nebodigatreba hokuspokusa za reševanje kubičnih enačb do izjemno uporabne bergle za opisovanje elektromagnetizma.

Matej Huš

Zadnje stoletje na njih temelji skoraj vsa moderna fizika, minuli mesec v znanstveni reviji *Nature* objavljeno odkritje fizikov z dunajske univerze pa kaže, da niso zgolj matematični pripomoček, temveč da dejansko obstajajo v srcu kvantne mehanike. Njena formulacija brez imaginarnih števil je merljivo in dokazljivo drugačna od realnosti. Imaginarna števila so vtkana v resničnost.

Kvadratne enačbe ($ax^2 + bx + c = 0$) spoznamo v drugem letniku srednješolskih programov. Poučevanje matematike kronološko ne sledi formalizmu, po katerem je danes utemeljena, temveč zgodovinskemu razvoju vede. Tak način je intuitivnejši, kar je razlog, da se je v istem redosledu tudi razvijala. Kakor se je pojem ničle v zgodovini pojavil sorazmerno pozno, tudi sami najprej spoznamo naravna števila, začenši z enico, šele pozneje védenje razširimo na ničlo.

Probleme, ki jih v moderni matematiki zapišemo s kvadratnimi enačbami, so znale reševati že starodavne civilizacije, le da so jih zapisovale z besedami in geometrijskimi liki. Kakor danes zdrdramo diskriminanto ($b^2 - 4ac$), so že stare civilizacije vedele, da so nekatere kvadratne enačbe rešljive, druge pa ne. V slednjih so naletele na kvadratni koren negativnega števila, česar se z realnimi števili ne da izračunati. Podobno tudi ploščina ne more biti negativna. Koreni negativnih števil jim zato niso predstavljali težave, temveč so bili dojeti kot matematični signal, da rešitve ni. Navsezadnje je bil že koncept negativnih števil za zgodnje kulture absurden, kaj šele njihovi koreni.

Negativnim številom so se raje izognili. Medtem ko danes govorimo o eni sami, splošni kvadratni enačbi, so v zgodnji matematiki »poznali« več vrst kvadratnih enačb, tako da so bili koeficienti vsakokrat pozitivni ($x^2 = x + 2$ in $x^2 + x = 2$ sta bila zadnja različna *tipa*). Namesto v spremenljivkah so razmišljali geometrijsko; problemi so obsegali ploščine, like, oblike in presečišča.

Zlom geometrije

Korak naprej so kubične enačbe, v katerih neznanka nastopa s tretjo potenco. Med prvimi se jih je lotil perzijski matematik Omar Hajam iz 11. stoletja, ki jih je razvrstil v več skupin in nekatere izmed njih z geometričnim pristopom – risanjem presečišč različnih stožnic – tudi rešil. A razcvet so doživele v zgodnjem 16. stoletju v Italiji. Scipione del Ferro, profesor matematike z bolonjske univerze, je ugotovil, kako lahko reši kubične enačbe, ki nimajo kvadratnega člena ($ax^3 + cx + d = 0$). Skrivnosti ni izdal, temveč jo je šele leta 1526 na smrtni postelji razkril svojemu študentu Antoniu Fioreju. Štiri leta pozneje je isto rešitev samostojno odkril tudi Niccolò Tartaglia, ki se je s Fiorejem zapletel v matematični dvoboj in ga dobil.

Danes nosijo univerzalne formule za rešitev vseh kubičnih enačb ime po Gerolamu Cardanu, ki mu je Tartaglia razkril svoj način reševanja posebne vrste kubičnih enačb. Cardano je napravil korak naprej in rešil vseh 13 oblik kubičnih enačb, ki jih je našel, kar v modernem jeziku pomeni, da je rešil splošno kubično enačbo.

Tudi v Cardanovih formulah nastopajo kvadratni koreni, pod katerimi so lahko negativna števila. A matematika se je tu zapletla. Medtem ko so pri kvadratnih enačbah koreni negativnih števil jasen znak, da realne rešitve ni, se isto lahko zgodi tudi pri kubičnih enačbah, ki pa realne pozitivne rešitve imajo. Zdelo se je, da je treba pri reševanju običajnih kubičnih enačb (s pozitivnimi koeficienti) nekako prebresti močvirje z nenavadnimi, absurdnimi kvadratnimi koreni negativnih števil, da bi vnovič prispeli do zglednih realnih rešitev. To je zrušilo enostavno preslikavo med enačbami in geometrijo, saj si nihče ni predstavljal, kaj neki bi negativna ploščina lahko bila.

Absurdna števila

Medtem ko se je Cardano zadovoljil z nepopolnim zmagoslavjem – njegov algoritem si je v nekaterih primerih polomil zobe –, je Rafael Bombelli zagrizel dalje. Absurdna števila, na katera je naletel, je zapisal kot vsoto realnih števil in korenov negativnih števil. Če to dovolimo in opustimo geometrijske ustreznice enačb, Cardanove formule zgledno delujejo. Koreni negativnih števil se v njih pred končno rešitvijo odštejejo in uničijo. Bombelli je odkril kompleksna števila.

V 17. stoletju jih je s pridom uporabljal Rene Descartes, ki je kvadratne korene negativnih števil posmehljivo poimenoval imaginarna števila, in ime se je prijelo. Kompleksna števila so vsota realnega in imaginarnega števila. Leonhard Euler je v 18. stoletju v kompleksni analizi že intenzivno uporabljal imaginarna števila, odkril številne izreke in uporabil oznako i za vrednost $\sqrt{-1}$, ki se imenuje imaginarna enota. Kompleksna števila so dobila moderno obliko.

Ko »običajna« števila predstavimo na znameniti številski premici, je ta z realnimi števili povsem polna. Za kompleksna števila zato potrebujemo celotno ravnino, saj eno dimenzijo predstavlja realni del, drugo pa imaginarni. Nastala kompleksna ravnina je pripraven pripomoček za predočitev operacij z njimi: seštevanje je risanje trikotnikov, množenje je vrtenje z raztegovanjem itd. Kompleksna števila so eleganten pripomoček za opis ravninske geometrije in transformacij v dveh dimenzijah.

Moderna matematika je prežeta s kompleksnimi števili, njihova uporabnost pa sega tudi v druge discipline. V matematiki so zaradi povezave s trigonometričnimi funkcijami (sinus, kosinus) nepogrešljiv del geometrije, teorije števil, linearne algebre in kompleksne analize. V aplikativnih vedah pa jih najraje uporabljajo elektroinženirji, saj je z njimi opis izmeničnih tokov in električnih vezij neprimerljivo elegantnejši in analiza signalov lažja.

Ugovarjati bi mogli, da so imaginarna števila matematična kurioziteta. Negativnih ploščin ni, pri reševanju kvadratnih enačb imaginarne rešitve nimajo ustreznice v dejanskosti, elektroinženirji bi brez njih povsem zadovoljivo shajali, dasiravno bi bili njihovi zapiski daljši in okornejši, izračuni pa nekoliko daljši. Tudi Einsteinova teorija relativnosti, ki je bila svojčas zaradi preglednosti zapisana s kompleksnimi števili, zmore brez njih. Zdi se, da so kompleksna števila dovršena nadgradnja matematike, uporaben izum in poenostavitev številnih problemov, a v svoji srži vendarle povsem antropološki koncept. Pomagajo nam tolmačiti svet, ne da bi dejansko obstajala. Dokler se tega zavedamo, ni s tem seveda nič narobe, saj sta zgodovina in sedanjost polni podobnih bergel.

Velika vrnitev

V začetku 20. stoletja se je zgodila največja revolucija v fiziki: kvantna mehanika. V njenem središču je valovna funkcija, ki predstavlja nov, verjetnostni opis stanja sistema. Izračunamo jo kot rešitev enačbe, ki jo je leta 1925 prvi zapisal Erwin Schrödinger. Množico vseh možnih stanj v kvantni mehaniki opisuje kompleksni Hilbertov prostor, i. Schrödingerjeva enačba, ki predstavlja temelj kvantne mehanike, je enake oblike kot Fourierjeva enačba za prevajanje toplote iz leta 1822, le da vsebuje imaginarno komponento, i.

Fiziki so v začetku 20. stoletja menili, da so kompleksna števila omejena zgolj na matematiko. Do pojava kvantne mehanike se je dalo vso fiziko – nekatere dele sicer okorneje – opisati brez njih. Celo Schrödingerja so motila in v pismu nobelovcu Hendriku Lorentzu je leta 1926 zapisal: »Kar je tu neprijetnega in čemur moramo neposredno nasprotovati, je uporaba kompleksnih števil. Valovna funkcija je fundamentalno realna funkcija.« Zapis s kompleksnimi števili je zagotovo matematična bližnjica, ker so imaginarna števila tesno povezana s trigonometričnimi funkcijami in torej z valovanji in nihanji, a nič več kot to, je menil.

Schrödingerjeva valovna enačba je le najbolj znan izmed več enakovrednih matematičnih opisov kvantne mehanike, a v prav vseh nastopajo imaginarna komponenta in kompleksna števila. So torej kompleksna števila res zgolj orodje v kvantni mehaniki, podobno kot pri reševanju kubične enačbe? Na prvi pogled se zdi vprašanje nesmiselno dlakocepstvo. Fizika je eksperimentalna veda, ki teoretične napovedi preverja, rezultati preizkusov pa so lahko le realne vrednosti. In kvantna mehanika je vseh sto let pri napovedovanju in opisovanju eksperimentov sijajna.

Da bi mogla napovedati, poskuša fizika tudi razumeti. Preizpraševanje vloge kompleksnih števil v središču osnovne fizikalne teorije sveta trka ob najpomembnejši filozofski razmislek: kaj lahko vemo. Raziskovalna skupina Miguela Navascuésa na dunajski univerzi je naredila korak bliže odgovoru.

Eksperimentalna potrditev

V kvantni mehaniki je lahko elektron hkrati v dveh stanjih, kar imenujemo superpozicija stanj. Šele ko ga izrecno pogledamo, torej izvedemo meritev, ga prisilimo, da zavzame eno izmed stanj. Ugovor, da superpozicije ni in da elektron ves čas obstaja v enem ali drugem stanju, le vedeti tega ne moremo, je že pred desetletji zavrnila kopica različnih eksperimentov. Navsezadnje superpozicijo izkoriščamo tudi v kvantnih računalnikih, ki v tem desetletju prodirajo v svet.

Superpozicija obstaja in jo najlaže opišemo v kompleksnem prostoru. Ni pa takšen prostor nujen, saj moremo rezultat enako dobro opisati v realnem prostoru z dvakrat več razsežnostmi. Švicarski fizik Ernst Stueckelberg je že leta 1960 pokazal, da za opis enega kvantnega delca vedno zadostujejo realna števila.

Podobno velja, če opazujemo dva kvantno prepletena delca. Realni opis je zapletenejši in manj eleganten, a se enako ujema z meritvami. Če je tako z vsemi opazovanji in eksperimenti, potem so kompleksna števila le koristna bergla.

Navascués s sodelavci je decembra lani pokazal nasprotno. Zamislili so si postavitev, v kateri to ne drži. Izračunani rezultati eksperimenta z dvema paroma kvantno prepletenih delcev, ki jih izmerimo na treh lokacijah, so drugačni, če uporabimo kompleksni prostor ali pa realni prostor ne glede na število dimenzij. Taka eksperimenta sta izvedli dve kitajski raziskovalni skupini in ugotovili, da se rezultati ujemajo z napovedmi iz kompleksnega prostora.

Kompleksna števila, ki so se pred dobrimi petsto leti pojavila kot matematična zanimivost, kot absurdna števila za reševanje realnih enačb, so v resnici temelj stvarnosti in vgrajena v naš svet na najnižji možni ravni. Še vedno pa ostaja nerazrešeno vprašanje, zakaj je svet kompleksen in ne realen. Teorij je veliko, odgovore pa pričakujemo od nove generacije fizikov.

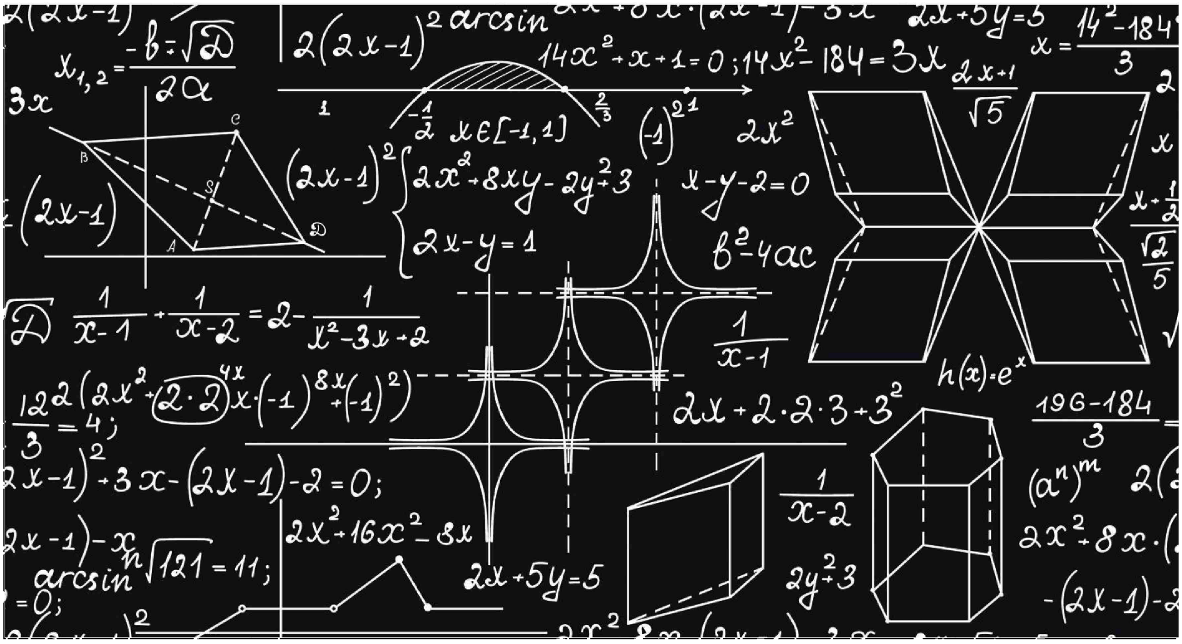
———

Dr. Matej Huš je znanstveni sodelavec na Kemijskem inštitutu, kjer raziskuje kemijske procese na ravni kvantne mehanike.

Superpozicija obstaja in jo najlaže opišemo v kompleksnem prostoru. Ni pa takšen prostor nujen, saj moremo rezultat enako dobro opisati v realnem prostoru z dvakrat več razsežnostmi.

Kompleksna števila, ki so se pred dobrimi petsto leti pojavila kot matematična zanimivost, so v resnici temelj stvarnosti in vgrajena v naš svet na najnižji možni ravni.

V začetku 20. stoletja se je zgodila največja revolucija v fiziki: kvantna mehanika. V njenem središču je valovna funkcija, ki predstavlja nov, verjetnostni opis stanja sistema.



Moderna matematika je prežeta s kompleksnimi števili, njihova uporabnost pa sega tudi v druge discipline. FOTO SHUTTERSTOCK