

DEFEKTI V TRDNI SNOVI
Pripravil: Miran Gaberšček

NEPRAVILNOSTI, VPLIVI NA LASTNOST GRADIV

■ Lastnosti materialov

- Strukturno neodvisne (at. masa, elastičnost ...)

- Strukturno odvisne (trdnost, žilavost, gostota)

■ Praktična uporaba defektnih struktur :

- Toplotna obdelava jekel

- Polprevodniki

- Sinteza materialov (sintranje)

- Lezenje ...

■ Tipi defektnih struktur

- Točkasti

- Linijski

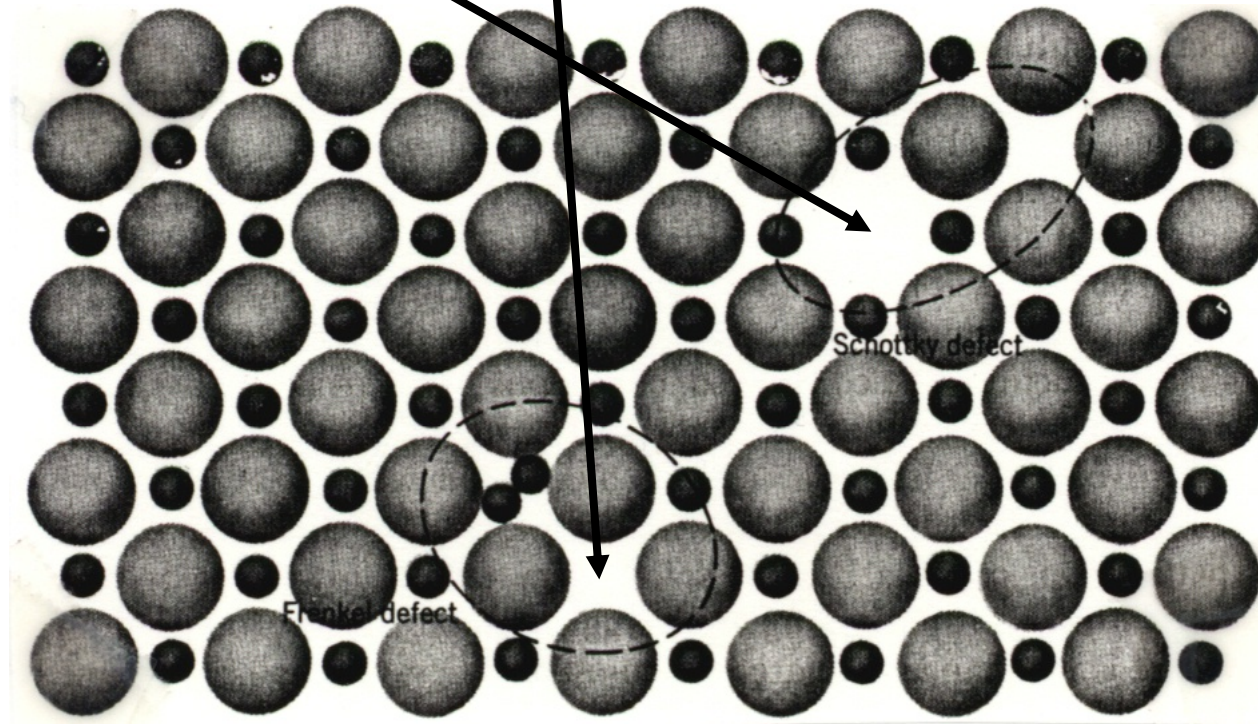
- Ravninski

- Volumski

■ Defekti zaradi termičnega nereda

■ Trdne raztopine (substitucijske, intersticijske

SCHOTTKY – FRENKEL DEFEKTI (NEPRAVILNOSTI)



TOČKASTI DEFEKTI

■ Ravnotežna koncentracija defektov

$$G = H - TS = U + PV - TS \quad \text{Definicija } G$$

$$\Delta G = \Delta U - T\Delta S \quad \text{Sprememba } G, \text{ če v material vnesemo defekte pri konst. } P \text{ in } T$$

$$\Delta G = nE_v - Tn\Delta S_{vib} - T\Delta S_m;$$

n – število defektov

E_v – delo, potrebno za pretrganje vezi in nastanek enega defekta

ΔS_{vib} – povečanje entropije zaradi lažjega vibriranja atomov v okolici defekta

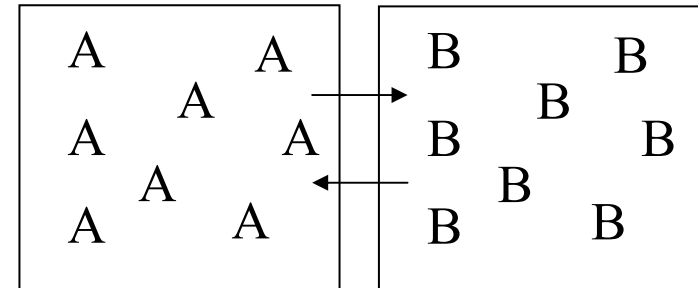
$$\Delta S_m = -k_B N (C_A \ln C_A + C_B \ln C_B) \quad \text{“entropija mešanja”}$$

TOČKASTI DEFEKTI

$$\Delta S_m = -k_B N (C_A \ln C_A + C_B \ln C_B)$$

$$\Delta S_m = -k_B N \left(\frac{n}{N} \ln \frac{n}{N} + \ln \frac{N-n}{N} - \frac{n}{N} \ln \frac{N-n}{N} \right)$$

$$\Delta S_m = -k_B (n \ln n + (N - n) \ln (N - n) - N \ln N)$$



$$C_A = \frac{n}{N}; \quad C_B = \frac{N-n}{N}$$

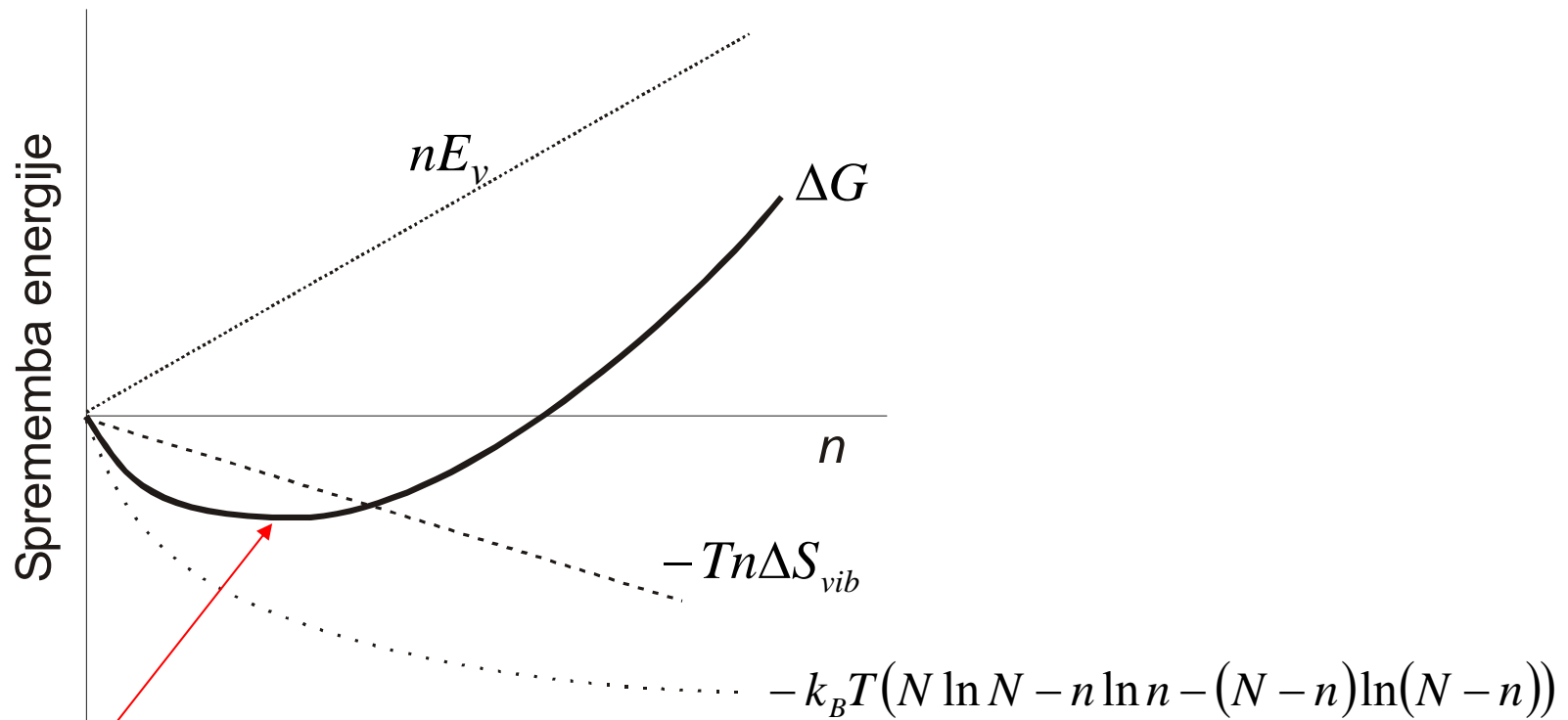
N – število vseh možnih mest

Celotna sprememba Gibbsove proste entalpije:

$$\Delta G = nE_v - Tn\Delta S_{vib} - k_B T (N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln (N - n))$$

TOČKASTI DEFEKTI

$$\Delta G = nE_v - Tn\Delta S_{vib} - k_B T(N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln(N - n))$$

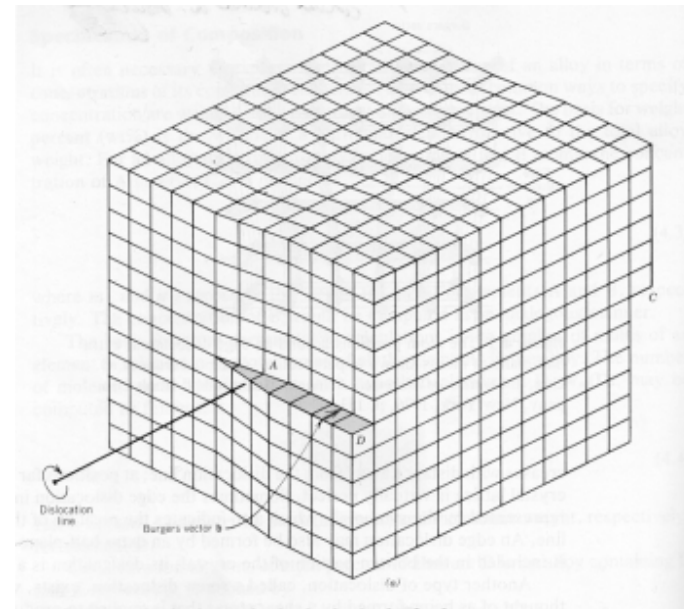
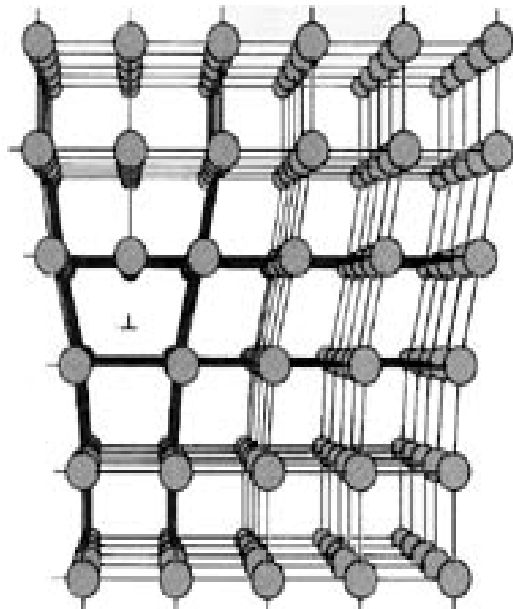


Ravnotežna koncentracija defektov

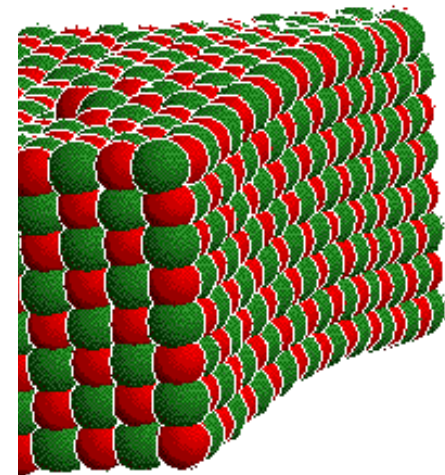
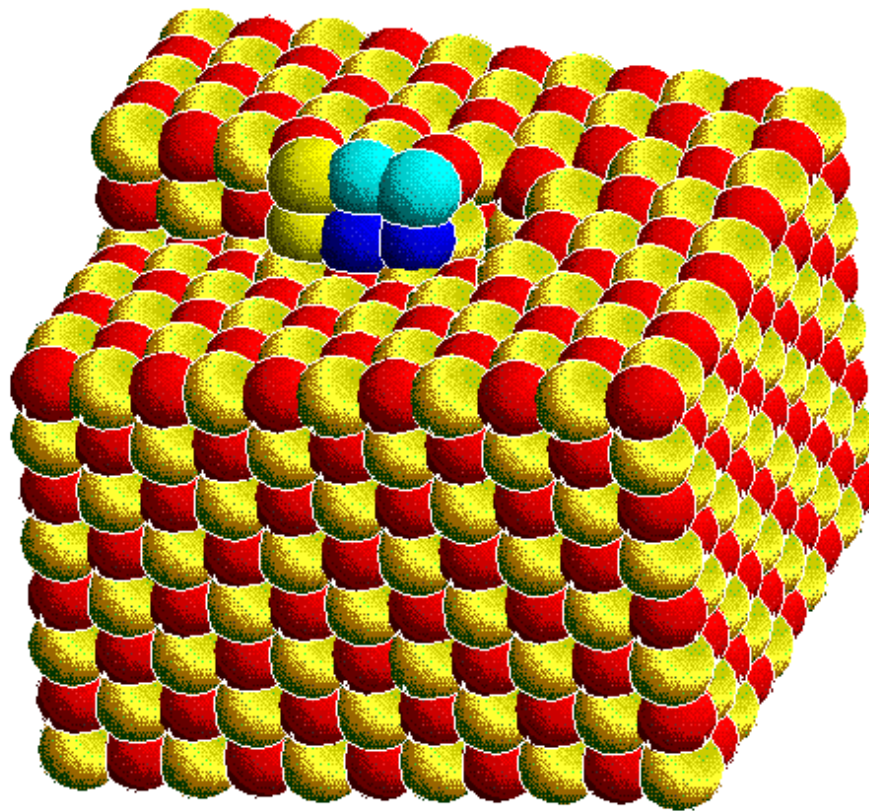
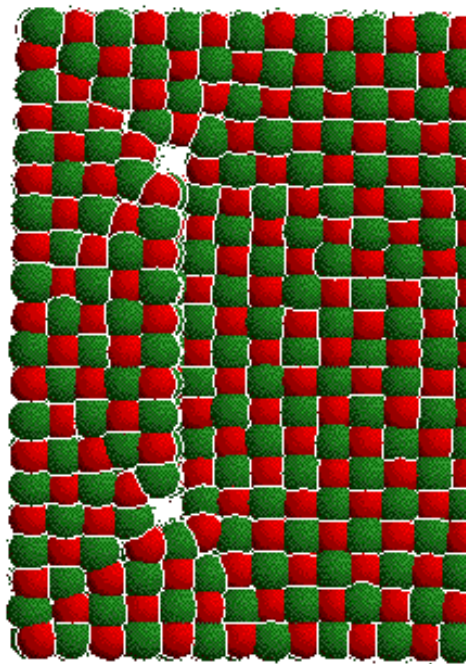
$$\frac{d\Delta G}{dn} = 0 = E_v - T\Delta S_{vib} - k_B T \ln\left(\frac{n}{N-n}\right) \implies \frac{n}{N-n} = e^{\frac{T\Delta S_{vib} - E_v}{k_B T}} = e^{\frac{\Delta S_{vib}}{k_B}} e^{\frac{-E_v}{k_B T}} = A e^{\frac{-E_v}{k_B T}}$$

LINIJSKI DEFEKTI - DISLOKACIJE

- Niso povezane s termodinamskim ravnotežjem snovi
- Nastanejo zaradi neravnotežne rasti kristalov iz taline, pare ali raztopine
- Delitev :
 - Robna dislokacija (edge dislocation) (Burgersov vektor \perp)
 - Vijačna dislokacija (screw dislocation) (Burgersov vektor \parallel)



$\langle 100 \rangle \{100\}$ VIJAČNA DISLOKACIJA MgO



DIFUZIJA V TRDNEM
Pripravil: Miran Gaberšček

Osnove difuzije

Linearna DIFUZIJA

Nekatere naravne procese (tudi difuzijo snovi ali toplote) dobro opišejo izbrane parcialne diferencialne enačbe in ustrezni robni pogoji.

Ena od metod, ki jih uporabljamo pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb: integralska transformacija

$$\mathcal{T}\{F(t)\} \equiv \tilde{F}(p) \equiv \int_a^b F(t)K(t, p)dt$$

$F(t)$ – funkcija (spremenljivke t), ki jo želimo transformirati

$\tilde{F}(p)$ - transformirana funkcija (spremenljivke p)

\mathcal{T} - predpis

$K(t, p)$ - jedro predpisa

Osnove difuzije

Primer integralske transformacije: Laplaceova transformacija

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \equiv \tilde{F}(s) \equiv \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt$$

Drugi Fickov zakon, zapisan v eni dimenziji

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

C – koncentracija

t – čas

D – difuzijski koeficient

x – krajevna koordinata

Osnove difuzije

Uporaba Laplaceove transformacije na 2. Fickovem zakonu

Leva stran:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial C}{\partial t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial C}{\partial t} e^{-st} dt = C e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} C e^{-st} dt = s\tilde{C} - C(t=0)$$

Desna stran:

$$\mathcal{L}\left\{D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right\} = D \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} e^{-st} dt = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} C e^{-st} dt = D \frac{d^2 \tilde{C}}{dx^2}$$

Transformiran 2. Fickov zakon:

$$s\tilde{C} - C(t=0) = D \frac{d^2 \tilde{C}}{dx^2}$$

Osnove difuzije

Polneskončna planarna difuzija s konstantnim izvorom

Enačba:

$$s\tilde{C} - C(t=0) = D \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2}$$

Začetni pogoj:

$$C(x, t=0) = 0$$

Robni pogoj:

$$C(x=0, t) = C_0$$

$$s\tilde{C} = D \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2} \implies \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2} - \frac{s}{D}\tilde{C} = 0$$

Splošna rešitev homogene enačbe 2. reda:

$$\tilde{C} = Ae^{\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x} + Be^{-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x}$$

Transformacija
robne pogoja:

$$\begin{aligned} L\{C_0\} &= \int_0^{\infty} C_0 e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} C_0 e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{C_0}{s} \end{aligned}$$

1. $A = 0$ (fizikalni razlogi)
2. B dobimo z upoštevanjem rob. pog.

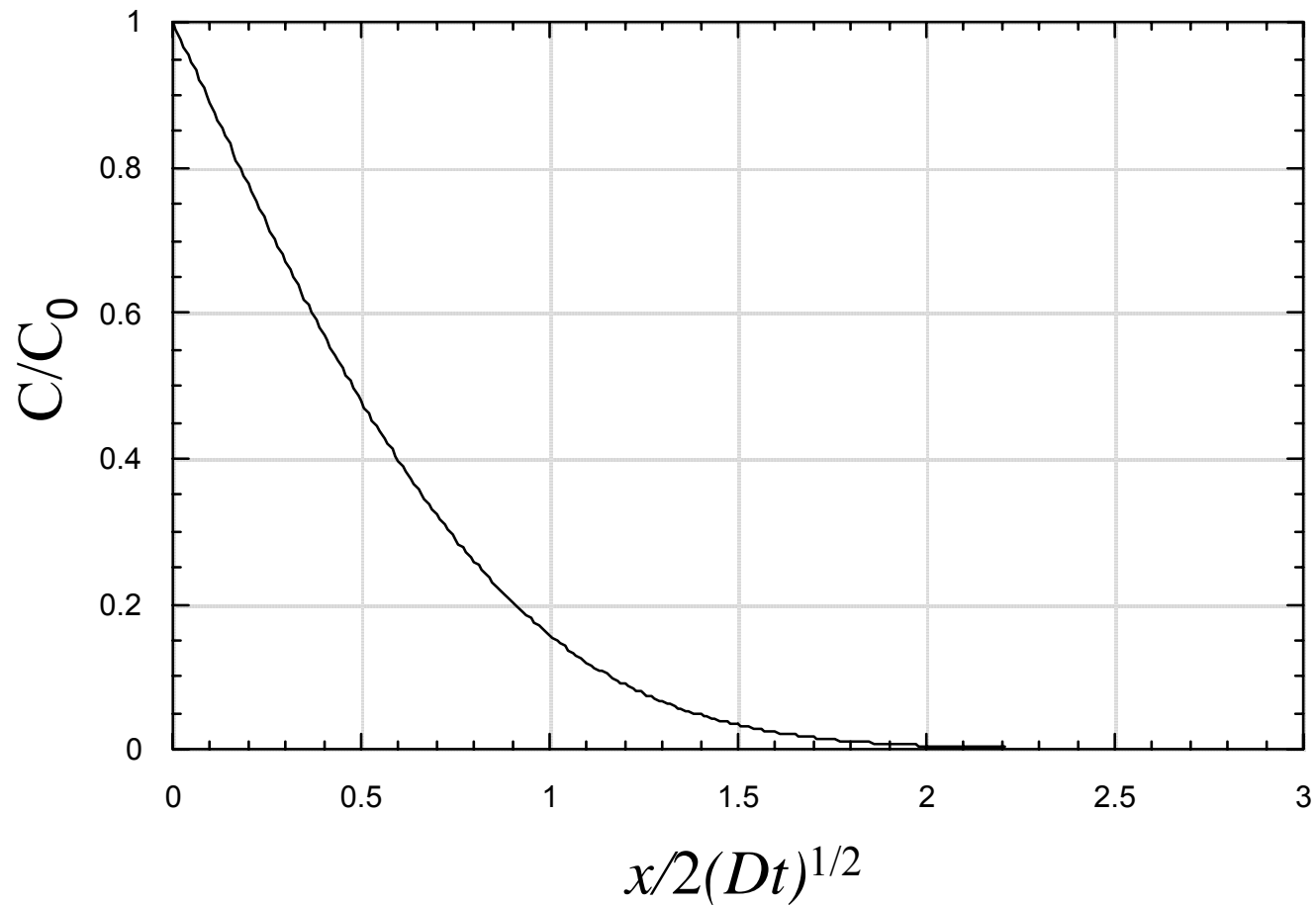
Končna rešitev:

$$\tilde{C} = \frac{C_0}{s} e^{-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x}$$

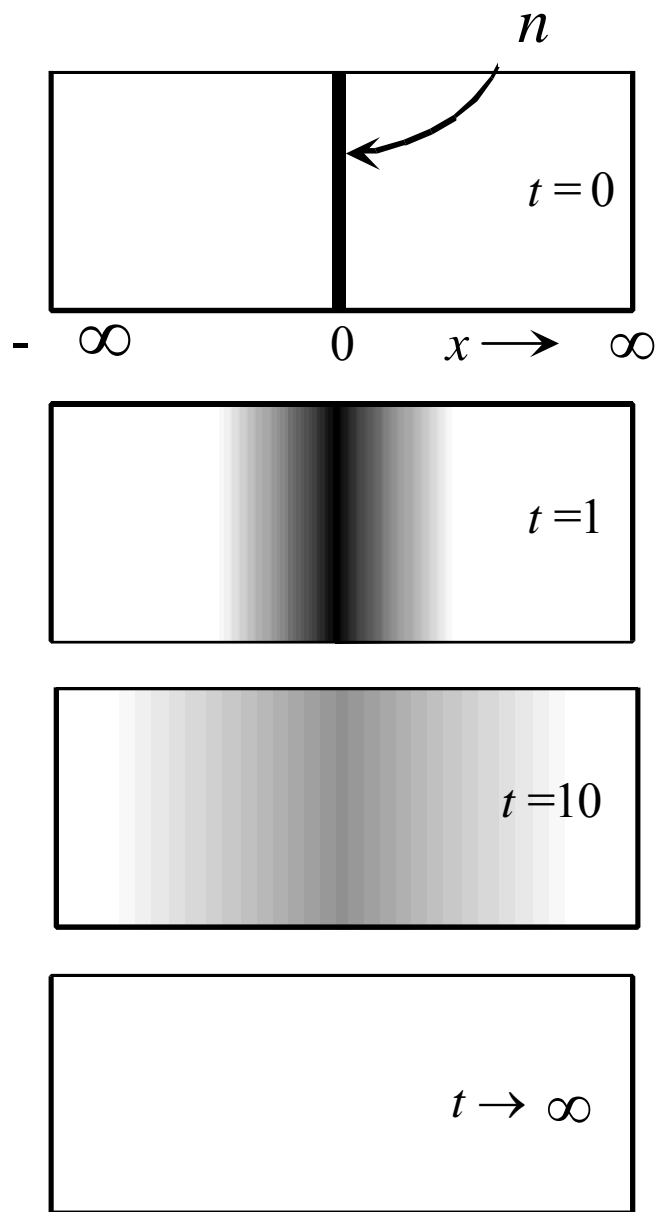
Osnove difuzije

Inverzna transformacija (tabele):

$$C(x,t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$



Osnove difuzije



Difuzija iz neskočno tankega planarnega izvora

Osnove difuzije

Difuzija iz neskočno tankega planarnega izvora

Enačba:

$$s\tilde{C} - C(t=0) = D \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2}$$

Začetni pogoj:

$$C(x, t=0) = 0$$

Robni pogoj:

$$C(\pm\infty, t) = 0$$

Lastnost neskončno tankega izvora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = \frac{n}{A}$$

$$s\tilde{C} = D \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2} \implies \frac{d^2\tilde{C}}{dx^2} - \frac{s}{D}\tilde{C} = 0$$

Transformacija enačbe za tanki izvor:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx dt = \int_0^{\infty} \frac{n}{A} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} C(x, t) dx \right] e^{-st} dt = \frac{1}{2} \frac{n}{A} \frac{1}{s}$$

$$\int_0^{\infty} \tilde{C}(x, s) dx = \frac{n}{2As}$$

Osnove difuzije

Difuzija iz neskočno tankega planarnega izvora - nadaljevanje

Transformirana
enačba:

$$\frac{d^2 \tilde{C}}{dx^2} - \frac{s}{D} \tilde{C} = 0$$

Transformirani
pogoj:

$$\int_0^{\infty} \tilde{C}(x,s) dx = \frac{n}{2As}$$

Splošna rešitev za $x > 0$:

$$\tilde{C}(x,s) = B e^{-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x}$$

$$\int_0^{\infty} \tilde{C}(x,s) dx = -\frac{B}{\sqrt{\frac{s}{D}}} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x} \Big|_0^{\infty} = \frac{B}{\sqrt{\frac{s}{D}}}$$

$$\frac{B}{\sqrt{\frac{s}{D}}} = \frac{n}{2As} \rightarrow B = \frac{n}{2A\sqrt{sD}}$$

Rešitev:

$$\tilde{C}(x,s) = \frac{n}{2A\sqrt{sD}} e^{-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x}$$

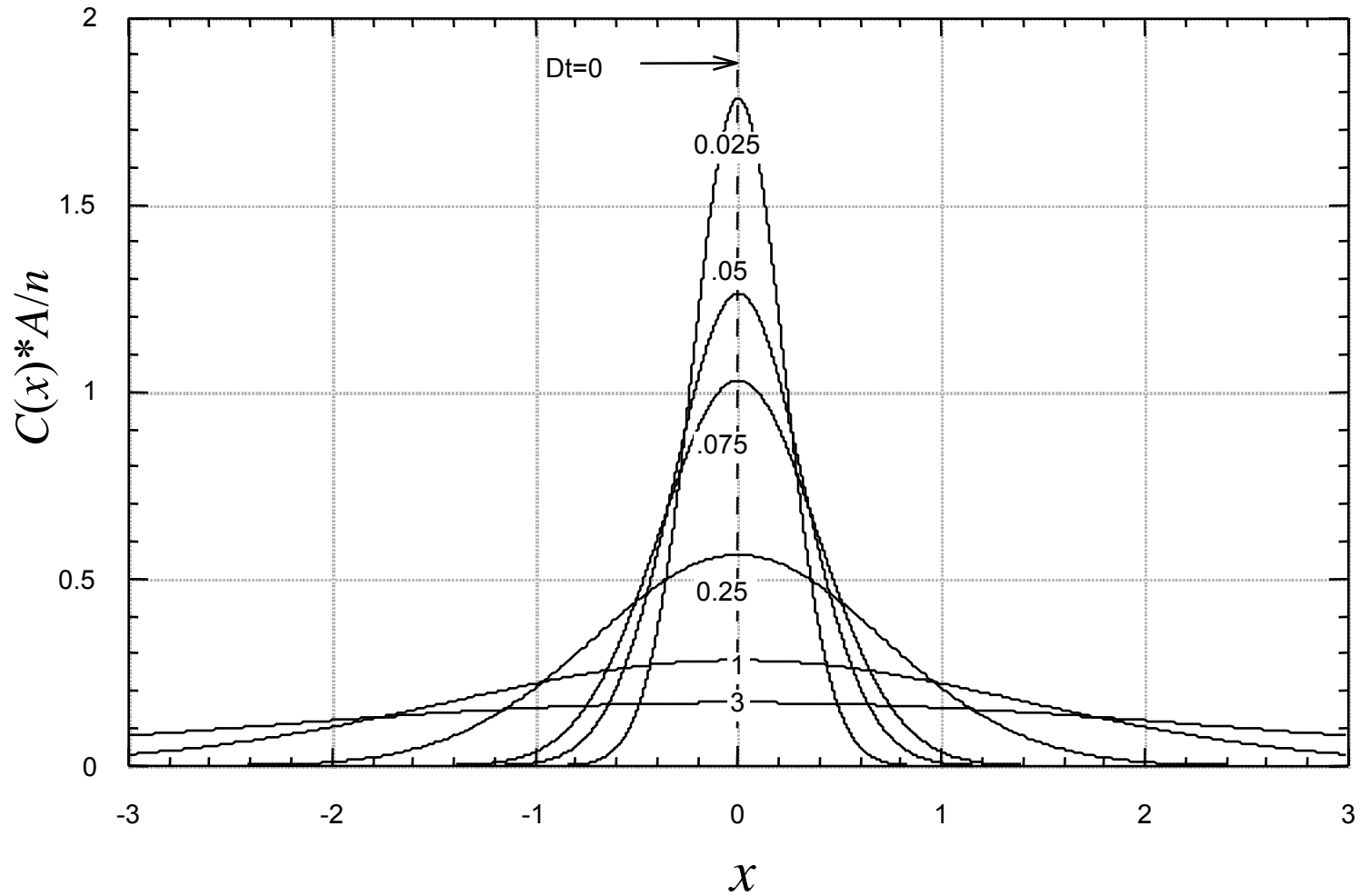
Po inverzni transformaciji:

$$C(x,t) = \frac{n}{2A\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Opomba: enako rešitev
dobimo za $x < 0$.

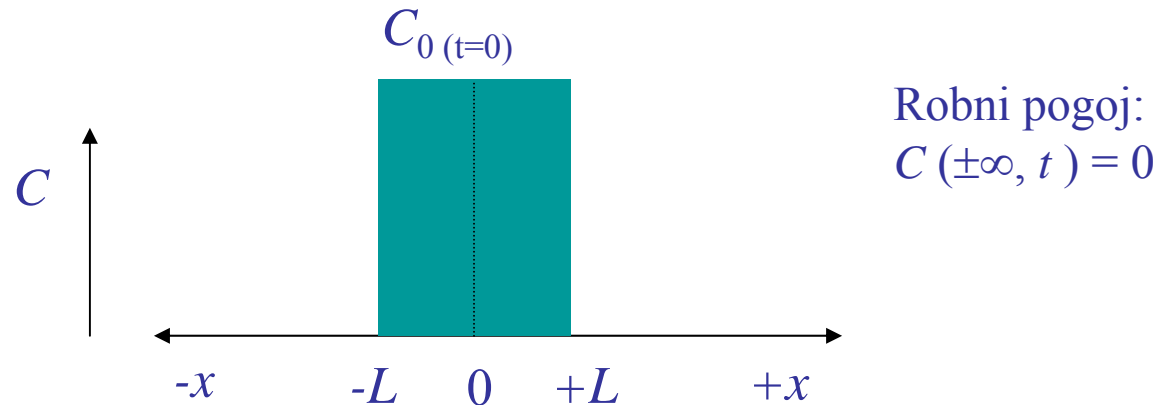
Osnove difuzije

Difuzija iz neskočno tankega planarnega izvora
Krajevno-časovni profil



Osnove difuzije

Difuzija iz 2D izvora



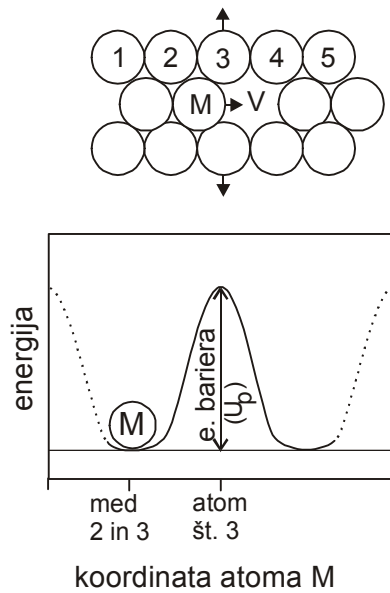
Seštejemo (integriramo) prispevke množice neskončno tankih izvorov od $-L$ do L

$$C(x, t; L) = \frac{C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-L}^L e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

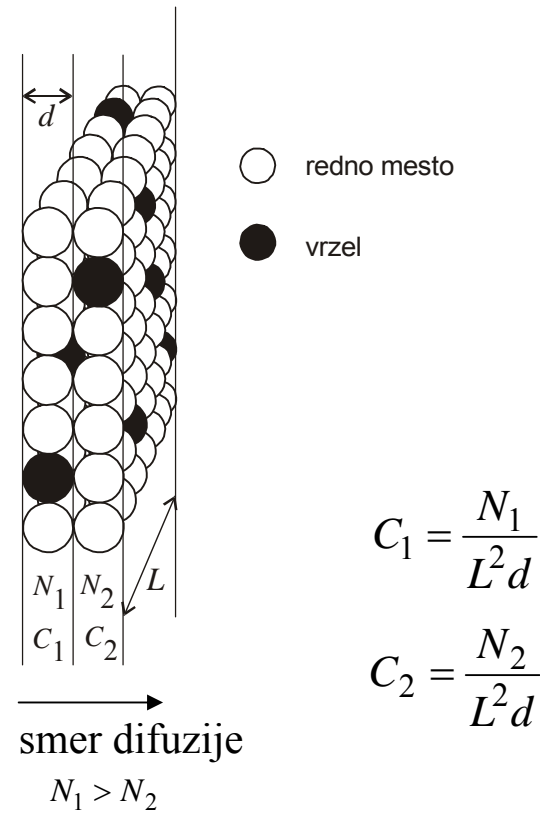
Uvedemo novo spremenljivko: $u = \frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}}$ in po integraciji dobimo:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{2\sqrt{Dt}}\right) \right]$$

DIFUZIJA V TRDNEM – POSLEDICA DEFEKTOV



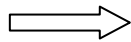
$$f = \nu e^{\frac{-U_p}{k_B T}}$$



$$C_1 = \frac{N_1}{L^2 d}$$

$$C_2 = \frac{N_2}{L^2 d}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2} f N_1 - \frac{1}{2} f N_2 = \frac{1}{2} f L^2 d (C_1 - C_2)$$



$$\frac{dN}{L^2 dt} = -\frac{1}{2} f d^2 \left(\frac{C_2 - C_1}{d} \right)$$

DIFUZIJA V TRDNEM – POSLEDICA DEFEKTOV

$$\frac{dN}{L^2 dt} = -\frac{1}{2} f d^2 \left(\frac{C_2 - C_1}{d} \right) \iff$$

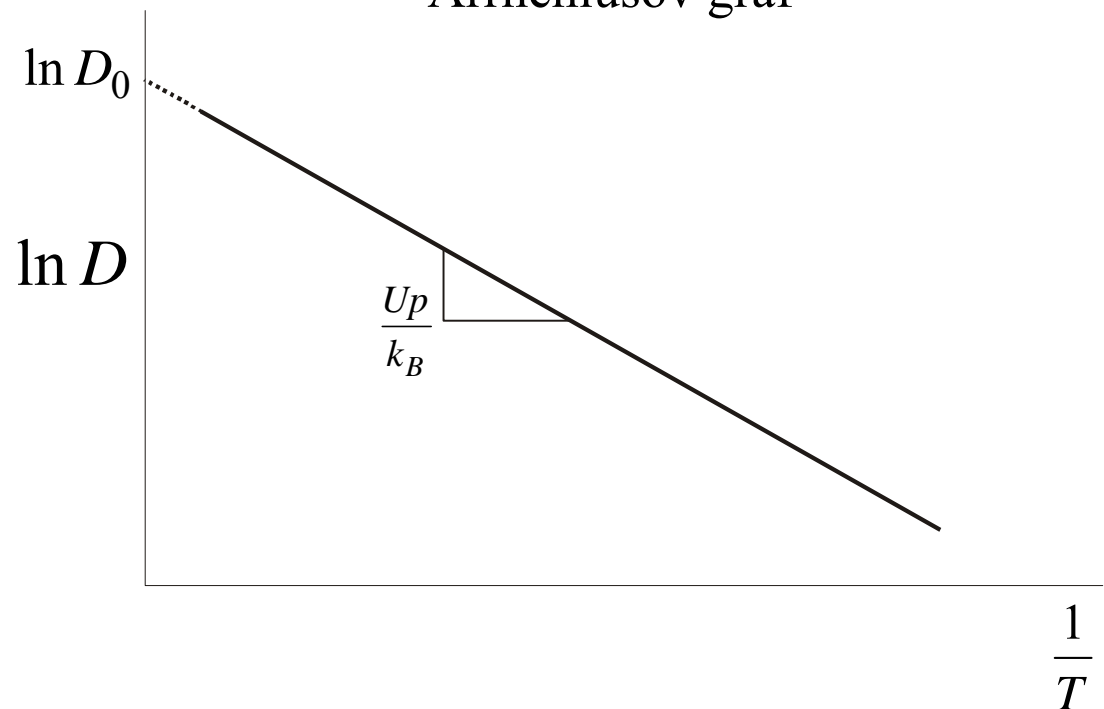
$$\text{Splošno: } j = -D \left(\frac{dc}{dx} \right)$$

$$D = -\frac{1}{2} f d^2 = -\frac{1}{2} v d^2 e^{-\frac{U_p}{k_B T}}$$

$$D = D_0 e^{-\frac{U_p}{k_B T}}$$

$$\ln D = \ln D_0 - \frac{U_p}{k_B} \frac{1}{T}$$

Arrheniusov graf



DIFUZIJA V TRDNEM – POSLEDICA DEFEKTOV

■ Kako se koncentracija spreminja s časom in krajem?

Poleg 1. Fickovega zakona potrebujemo še kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2. \text{ Fickov zakon})$$

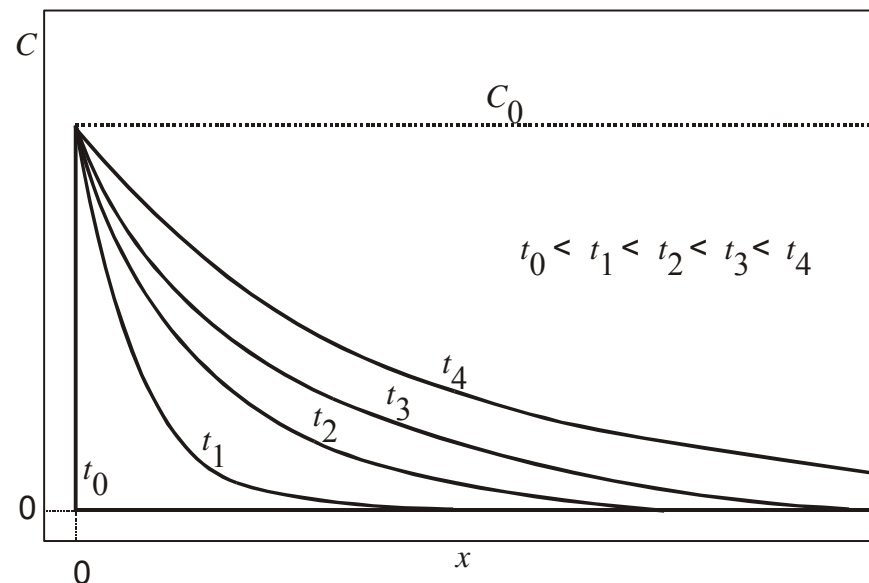
Začetni pogoj: $C = 0$ za vse x

Robni pogoj: $x = 0, C = C_0$

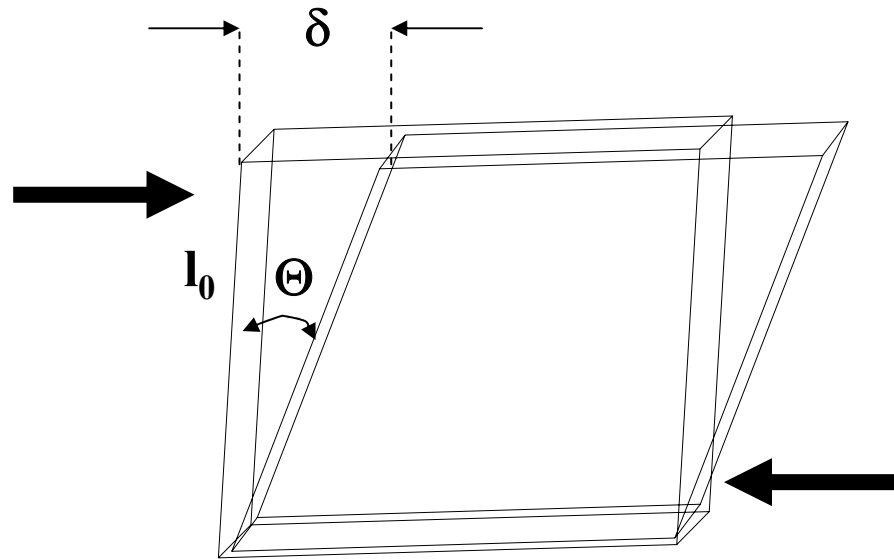
$x = \infty, C = 0$

$$C(x, t) = C_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)$$

kjer:
$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$



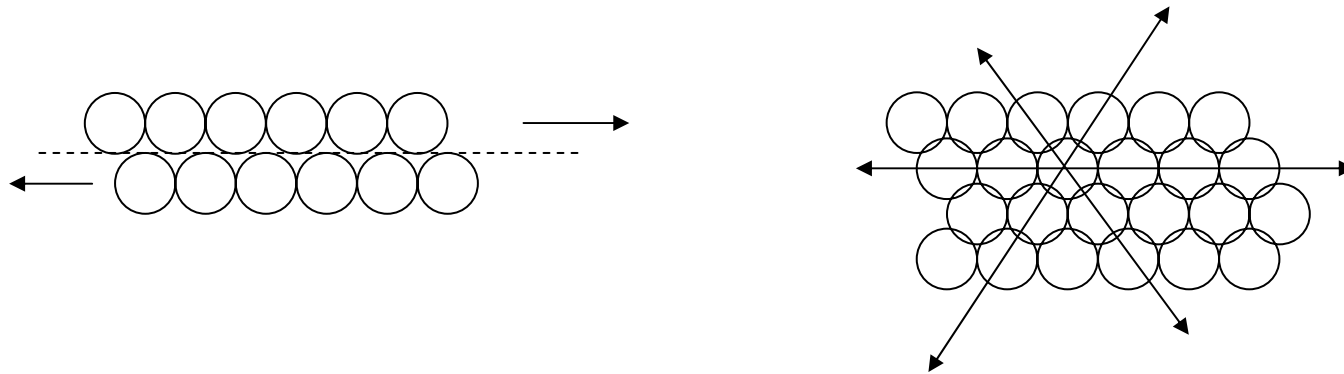
STRIŽNA NAPETOST



$$\frac{\delta}{l_0} = \operatorname{tg} \Theta = \gamma$$
$$\tau = G \cdot \gamma$$

■ $G = \text{strižni modul} \cong 30\text{-}40\% E$

DEFORMACIJA VZDOLŽ DOLOČENIH RAVNIN DRSENJA

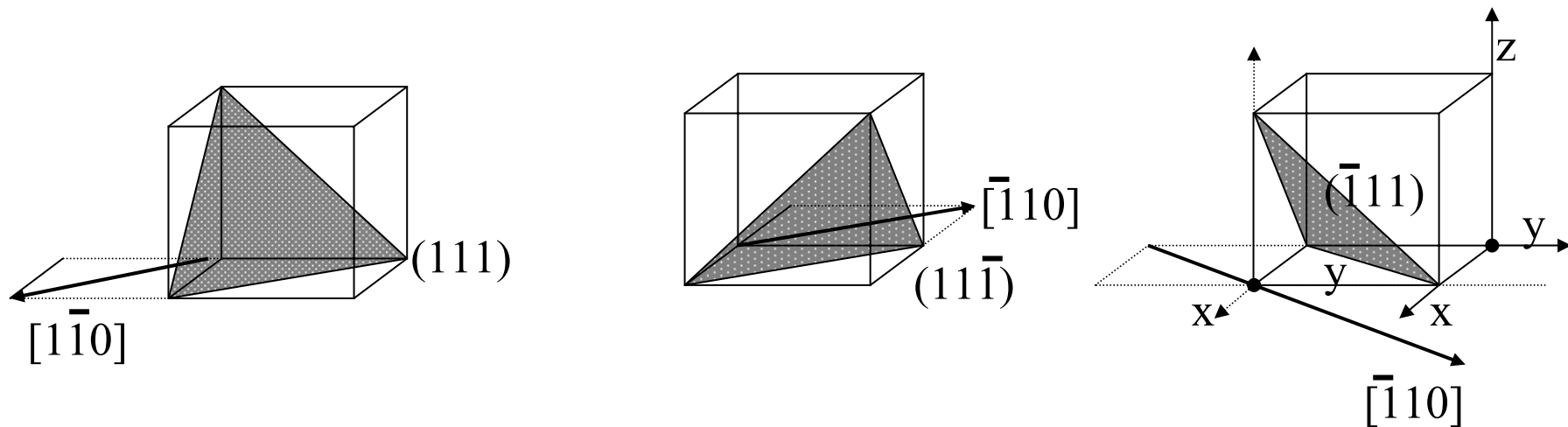


■ PCK struktura (Cu,Al,Ni,Pb,Au,Ag, γ -Fe)

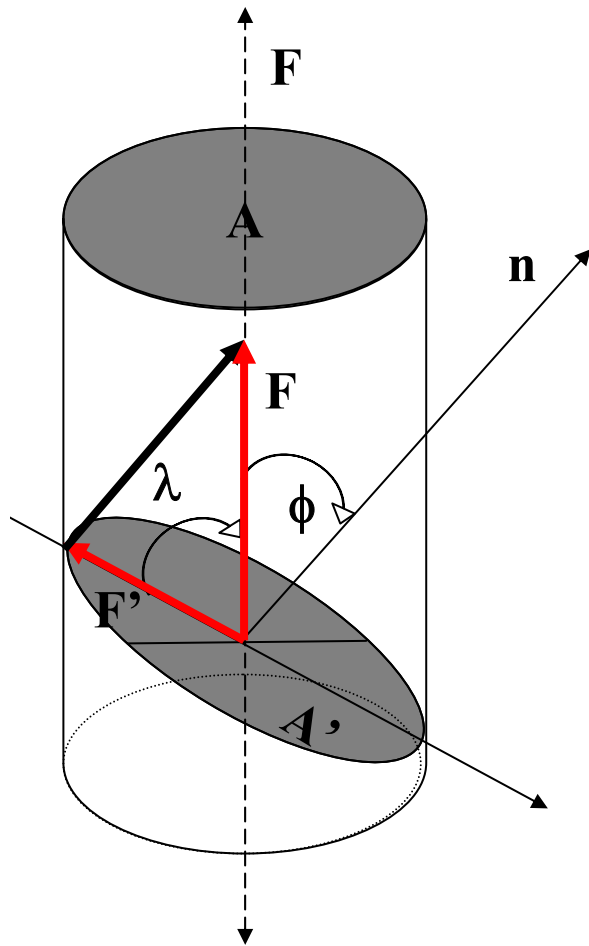
drsne ravnine $\{111\}$ (4)

drsne smeri $\langle 110 \rangle$ (3)

število sistemov : (12)



SCHMIDOV FAKTOR



$$F' = F \cdot \cos \alpha$$

$$A = A' \cdot \cos \phi$$

$$\frac{F'}{A'} = \frac{F \cdot \cos \lambda}{\cos \phi}$$

$$\tau = \sigma \cdot \cos \lambda \cdot \cos \phi$$

■ Deformacija (drsenje) se prične, ko doseže τ kritično vrednost τ_k

■ $\tau = 0$ ko je α ali $\phi = 90^\circ$

■ $\alpha = 90^\circ$, $A' \perp$ os preiskovanca

■ $\phi = 90^\circ$, $A' \parallel$ os preiskovanca (velik A)

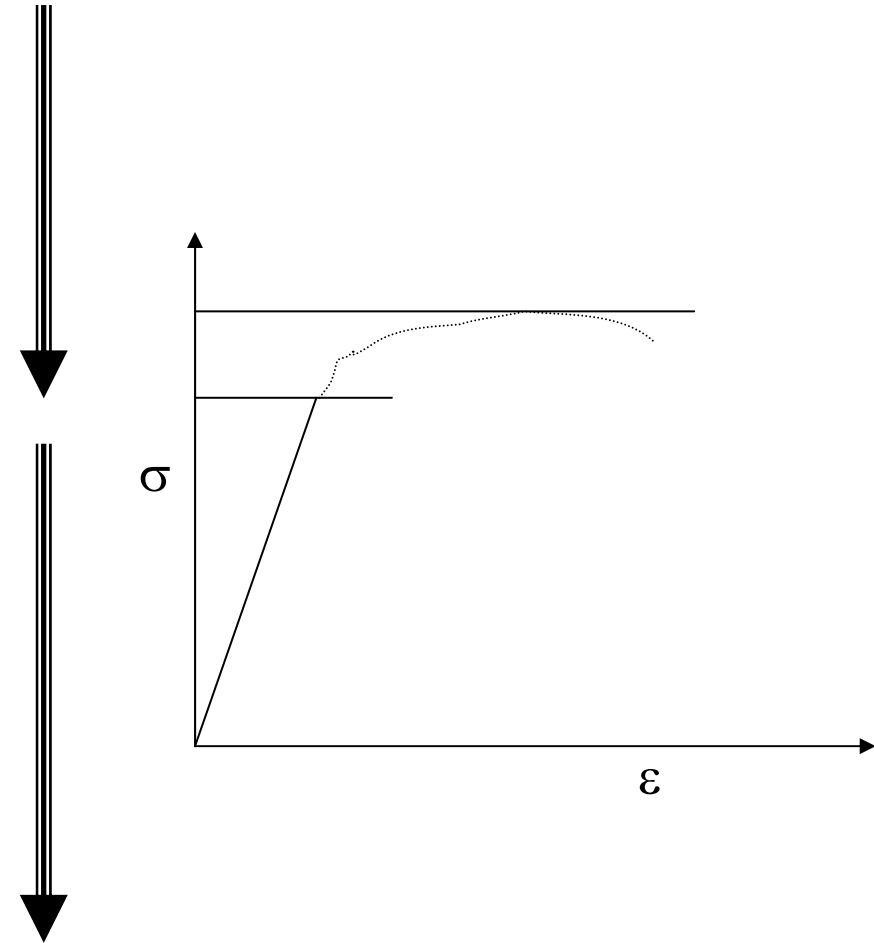
■ τ_{\max} ko je $\alpha = \phi = 45^\circ$, $\tau_{\max} = 0,5 \cdot \sigma_{\text{natezna}}$

■ $\cos \alpha \cdot \cos \phi$ je faktor orientacije

PONOVI

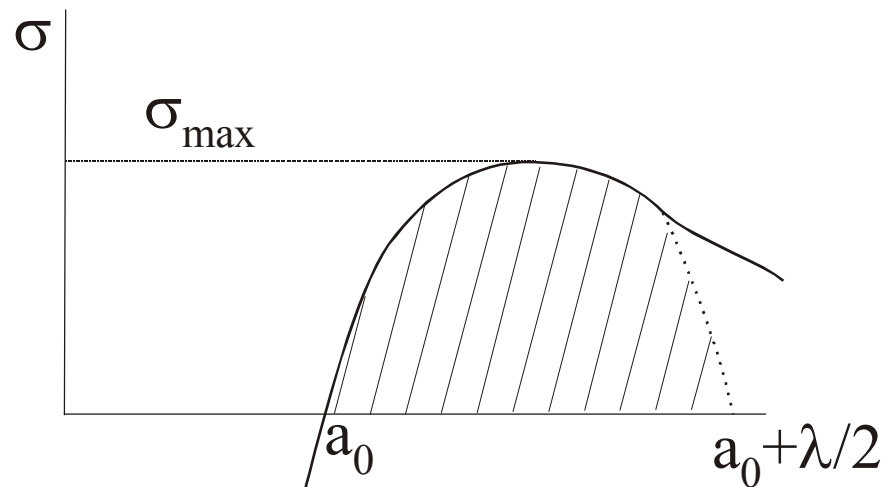
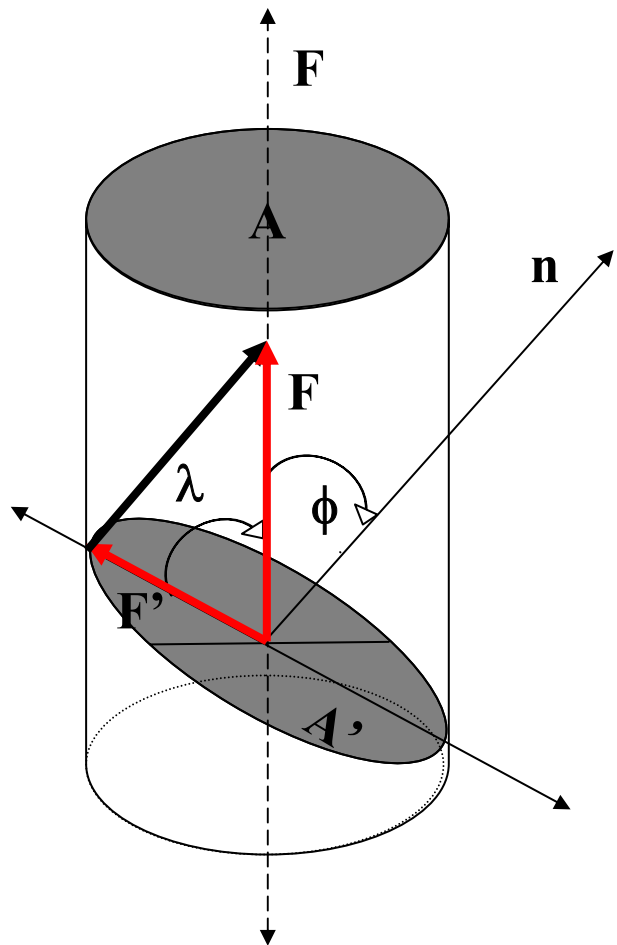
- Plastična deformacija
- Množenje dislokacij
- Utrjevanje materiala
- Porušitev

- Vključki
- Nepravilnosti
- Meje med zrni
- Oviranje gibanja dislokacij
- Otditev materiala



TEORIJE ZLOMA
Pripravil: Miran Gaberšček

TEORETIČNA ZLOMNA TRDNOST



$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$W = \int_0^{\lambda/2} \sigma dx = \sigma_{\max} \int_0^{\lambda/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = -\sigma_{\max} \frac{\lambda}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Big|_0^{\lambda/2}$$

$$W = \sigma_{\max} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \implies$$

$$\sigma_{\max} \cdot \frac{\lambda}{\pi} = 2\gamma$$

Energija, potrebna za prelom, je enaka novonastali površinski energiji

TEORETIČNA ZLOMNA TRDNOST

S slike vidimo tudi veljavnost Hookovega zakona pri majhnih x :

$$\sigma = E \frac{x}{a_0}$$

Odvajamo enačbo krivulje za σ in izenačimo z odvodom Hookove enačbe:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{\max} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{\max} = \frac{E}{a_0}$$

Upoštevamo še prej ugotovljeno enakost W in 2γ in dobimo:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a_0}}$$

■ Primer za Fe :

$$E_{\text{Fe}} = 200 \text{ GPa}$$

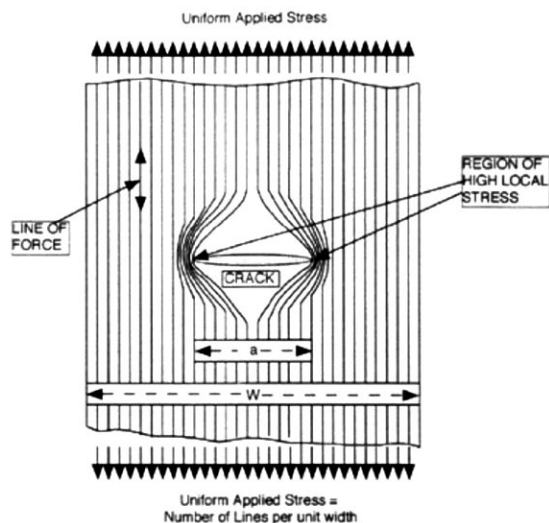
$$\gamma_{\text{Fe}} = 1 \text{ Jm}^{-2}$$

$$a_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\sigma_{\max} \cong 31600 \text{ MPa (izračun)}$$

$$\sigma_{\text{res}} \cong 600 \text{ MPa (podatek)}$$

GRIFFITHOVA TEORIJA



$$\sigma = E\varepsilon; \quad W = F\Delta x = \frac{\sigma^2 V}{E} \quad \text{Splošni zvezi}$$

$$\Delta U_{el} = -\frac{\sigma^2 \pi c^2 l}{E} \quad \Delta U_s = +4cl\gamma$$

$$\Delta U_{tot} = \Delta U_{el} + \Delta U_s = -\frac{\sigma^2 \pi c^2 l}{E} + 4cl\gamma$$

$$\frac{d\Delta U_{tot}}{dc} = 0 = -2\frac{\sigma^2}{E} \pi cl + 4l\gamma$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi c}}$$

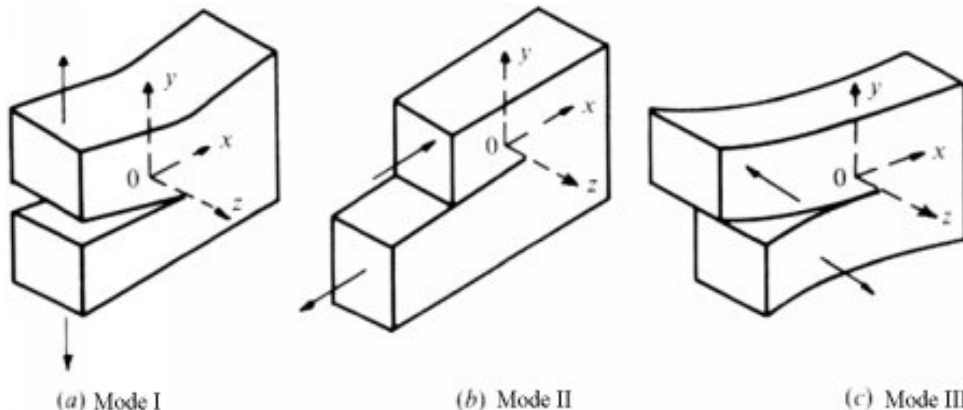
$$\sigma_c = K_c \sqrt{\frac{1}{c}}$$

Lastnost materiala – zlomna žilavost

ZLONNA ŽILAVOST, $I K_C$

$$\sigma_{\max} \cdot \sqrt{a} = K_C$$

- Čim večji je $a^{0.5}$ (napake v materialu) nižji je σ_{\max}
- K_C – kritična intenziteta napetosti ali zlomna žilavost (Fracture Toughness)
- Merilo za krhost materijala ($K_C \downarrow$) ali žilavost ($K_C \uparrow$)
- K_C odvisen od načina obremenjevanja
Nateg ima oznako 1 ali I



Material	$I K_C$ [MPam ^{-0.5}]
pure ductile metals	100--350
pressure vessel steel	170
high strength steel	50--150
titanium alloys	50--110
GFRP, fibreglass	20--60
aluminium alloys	20--45
cast iron	6--20
reinforced concrete	10--15
polystyrene	2
silicon nitride	4--5
magnesia	3
granite	3
wood	1
glass	0.5
ice	0.2

ELEKTROKINETIČNI POJAVI

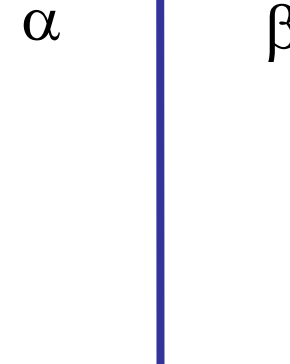
Pripravil: Miran Gaberšček

Nastanek električnega dvosloja

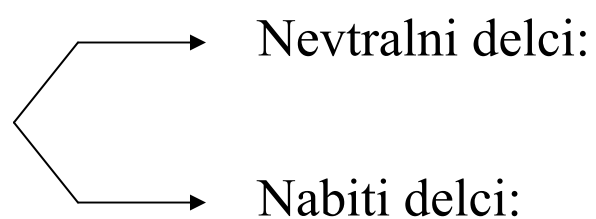
Nastane na faznih mejah. Vzroki:

- različna afiniteta faz do elektronov
- različna afiniteta faz do izbranih ionov
- ionizacija površinskih skupin
- fizikalno zajetje nabojev v fazah

fazna
meja



Pogoj za ravnotežje
med fazama:

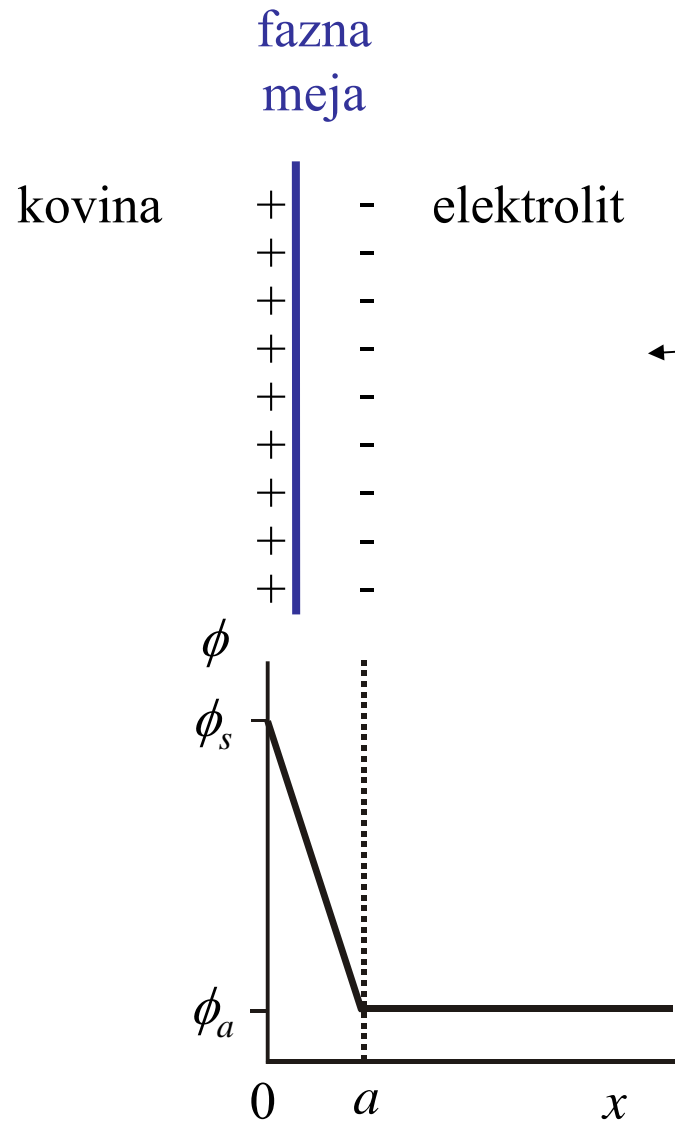


$$\mu_i^\alpha = \mu_i^\beta$$

$$\tilde{\mu}_i^\alpha = \tilde{\mu}_i^\beta$$

Modeli električnega dvosloja

1. Helmholtzov model



Opomba:
Narisan je le **presežni** naboj na kovini in v elektrolitu

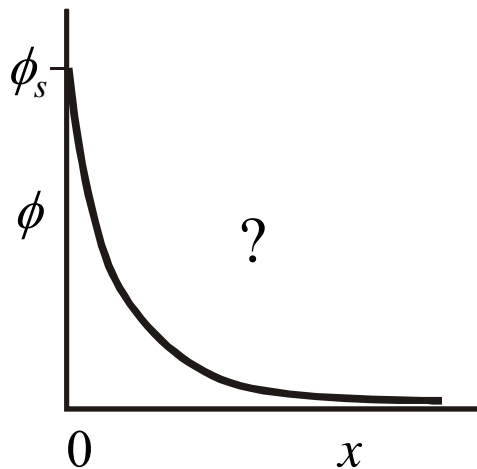
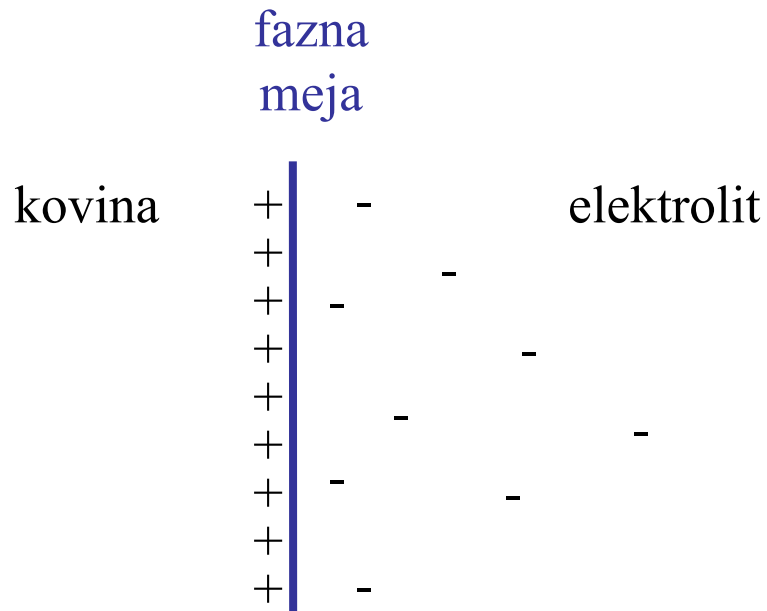
$$\phi = \left(\frac{\phi_a - \phi_s}{a} \right) x + \phi_s$$

ϕ – električni potencial

x – razdalja od naboja na kovini

Modeli električnega dvosloja

2. Gouy-Chapmanov model – osnovne enačbe



A) Zveza med koncentracijo c_i in potencialom ϕ :

$$\frac{c_i}{c_i^0} = \exp\left(\frac{-z_i F \phi}{RT}\right)$$

c_i^0 - koncentracija v območju elektronevtralnosti
 F – 96 487 As/mol

B) Zveza med potencialom ϕ in gostoto naboja ρ :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ϵ - dielektrična konstanta

ϵ_0 - influenčna konstanta

C) Zveza med gostoto naboja ρ in koncentracijami c_i nabitih delcev z nabojem z_i :

$$\rho = \sum_i z_i F c_i$$

Modeli električnega dvosloja

2. Gouy-Chapmanov model - rešitev

Združimo vse tri enačbe in upoštevamo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum_i z_i F c_i^0 \exp\left(\frac{-z_i F \phi}{RT}\right) \quad \text{Poisson-Boltzmannova enačba}$$

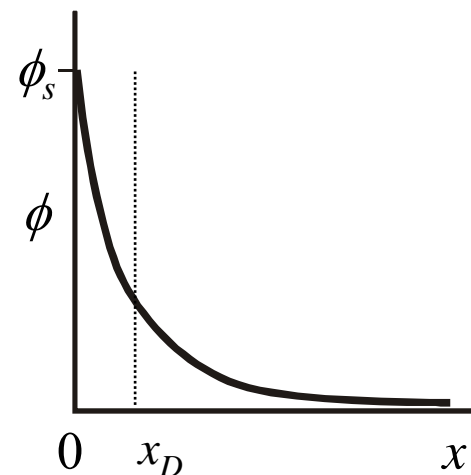
Rešitev za primer $z^+ = z^- = z$ (recimo NaCl):

$$\tanh\left(\frac{zF\phi}{4RT}\right) = \tanh\left(\frac{zF\phi_s}{4RT}\right) \exp\left(-\frac{x}{x_D}\right)$$

kjer $x_D = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 RT}{F^2 \sum c_i^0 z_i^2}}$ Debyeova dolžina

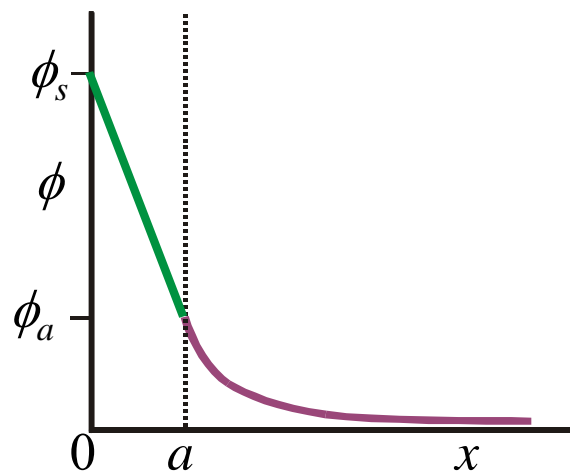
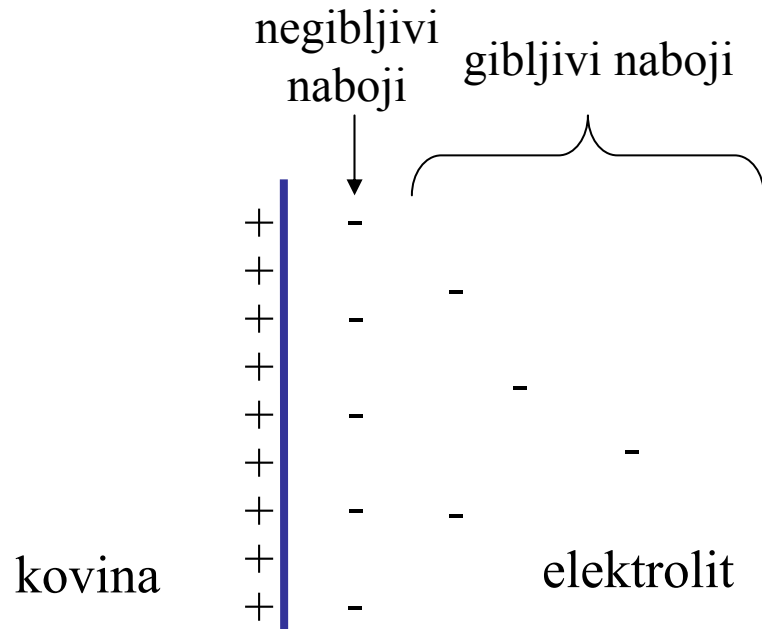
Rešitev za predpostavko: $zF\phi \ll RT$

$$\phi = \phi_s \exp\left(-\frac{x}{x_D}\right)$$



Modeli električnega dvosloja

3. Sternov model



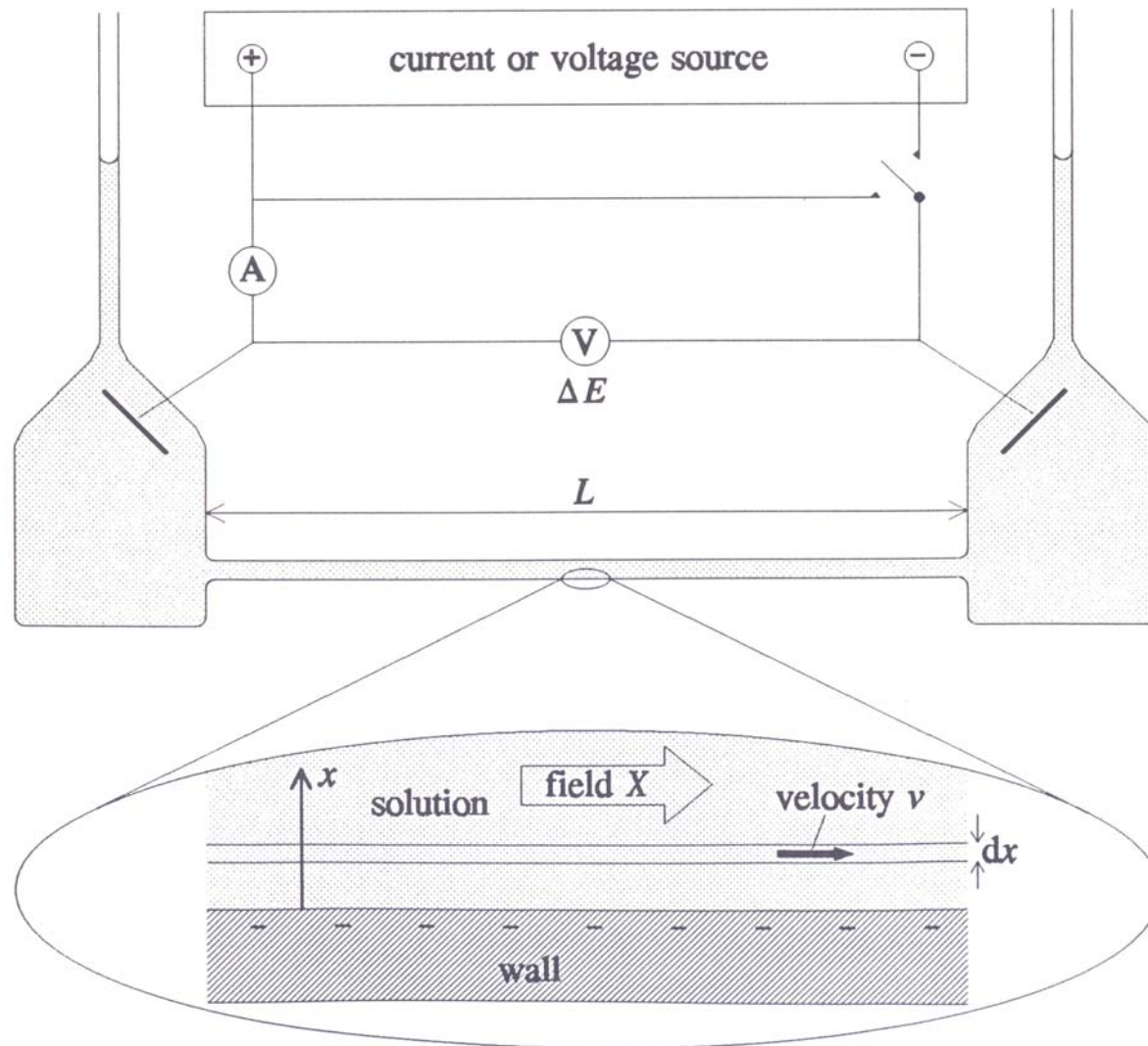
— Helmholtzov model

— Gouy-Chap. model

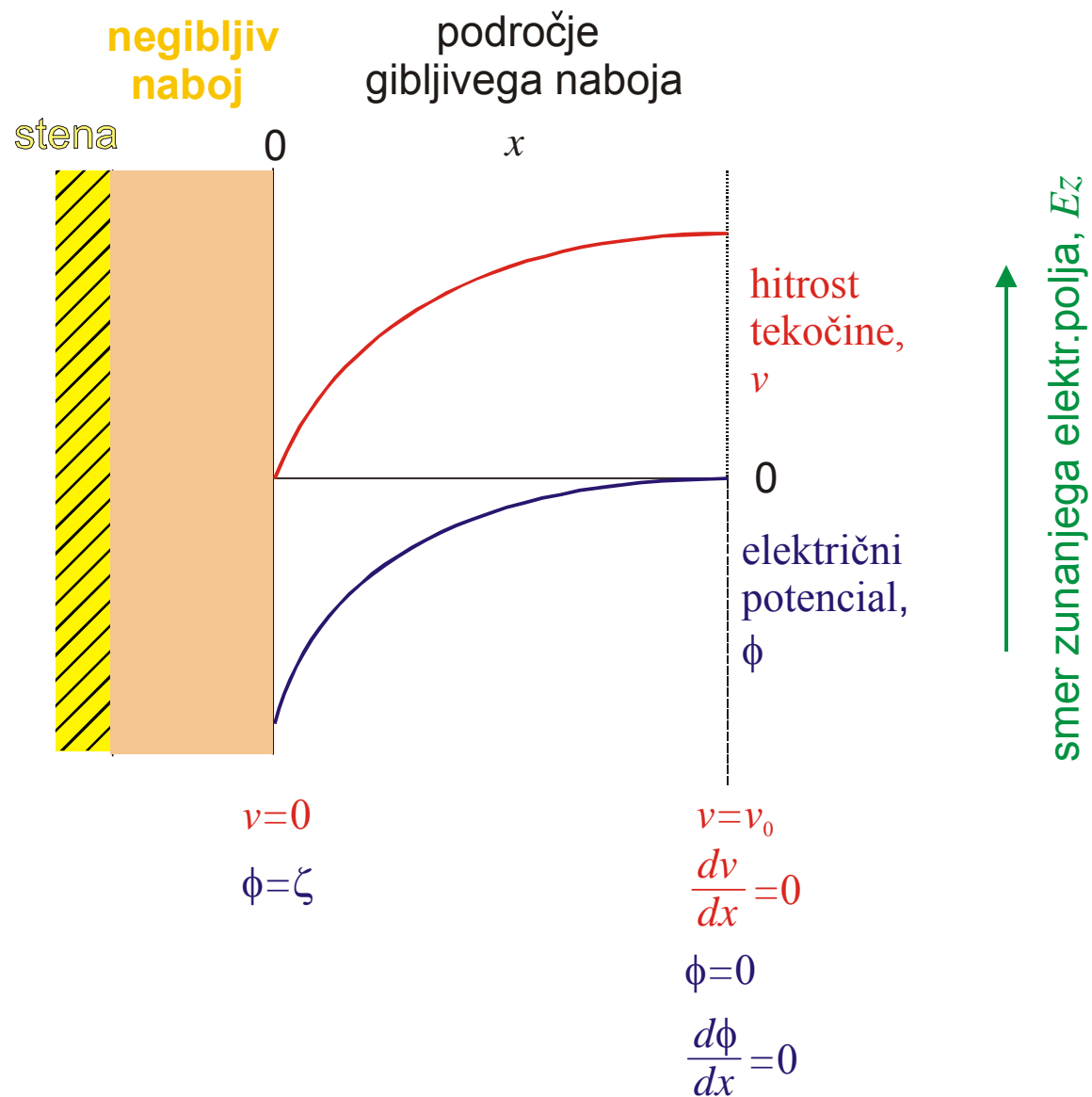
$$\phi = -\left(\frac{\phi_s - \phi_a}{a}\right)x + \phi_s$$

$$\phi \approx \phi_a \exp\left(-\frac{x-a}{x_D}\right)$$

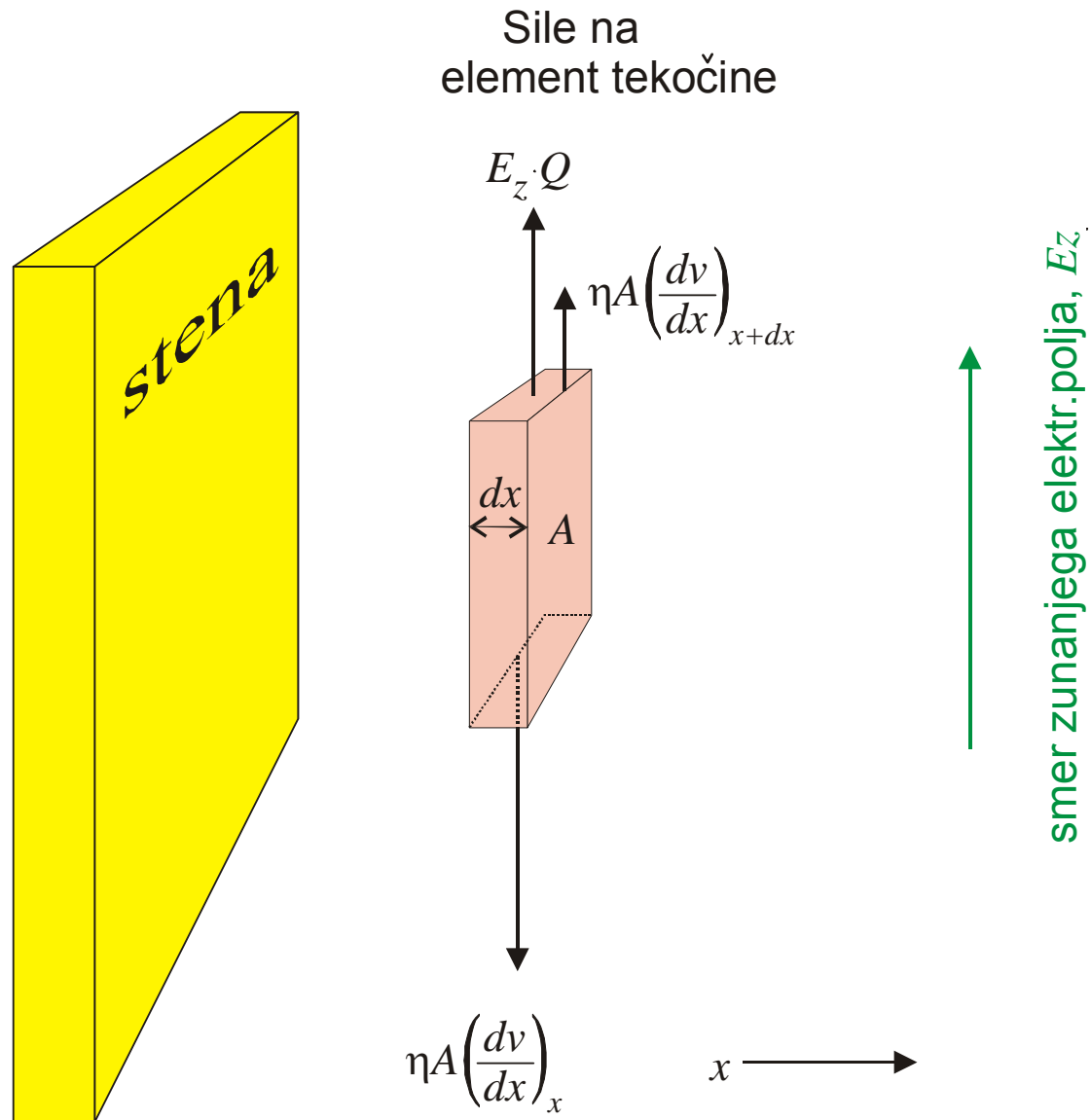
Elektroosmoza



Elektroosmoza



Elektroosmoza



Elektroosmoza

Ravnotežje sil: $E_z \rho dx = \eta \left(\frac{dv}{dx} \right)_x - \eta \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x+dx} =$

+ $= -\eta \frac{d^2v}{dx^2} dx$

Poissonova enačba: $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$

+ robni pogoji
(gl. shemo)

$$\frac{v_0}{E_z} = -\frac{\epsilon\epsilon_0\zeta}{\eta}$$

ϵ – dielekt. konstanta

ζ – zeta potencial

η – viskoznost

Tipične vrednosti:

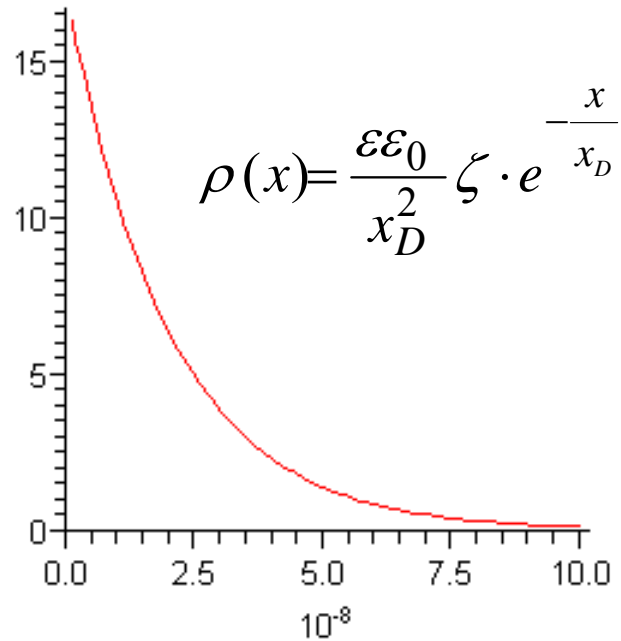
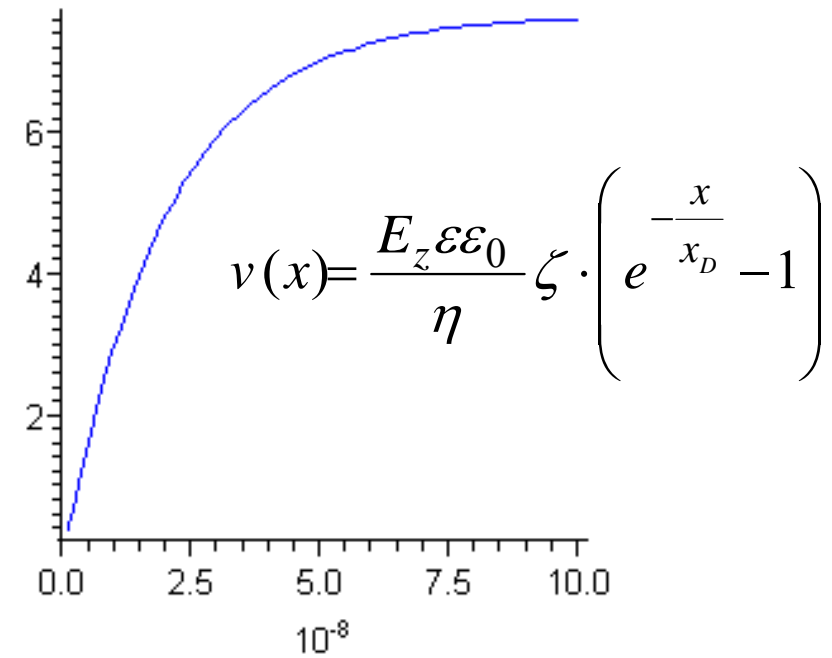
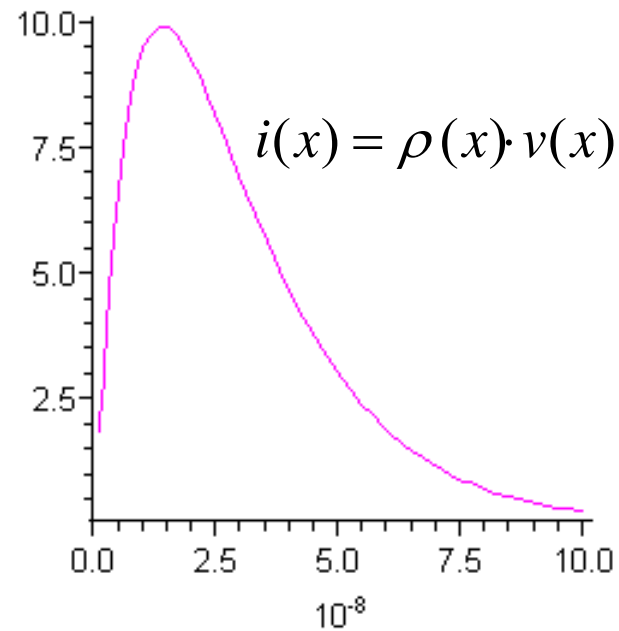
$\epsilon - 78$

$\zeta - 0.05 \text{ V}$

$\eta - 0.0009 \text{ Ns/m}^2$

$\frac{v_0}{E_z}$ – elektroosmotska mobilnost

$$\frac{v_0}{E_z} = 3.8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

As/m³/10⁴m/s/10⁻⁸A/m²/10⁻⁶

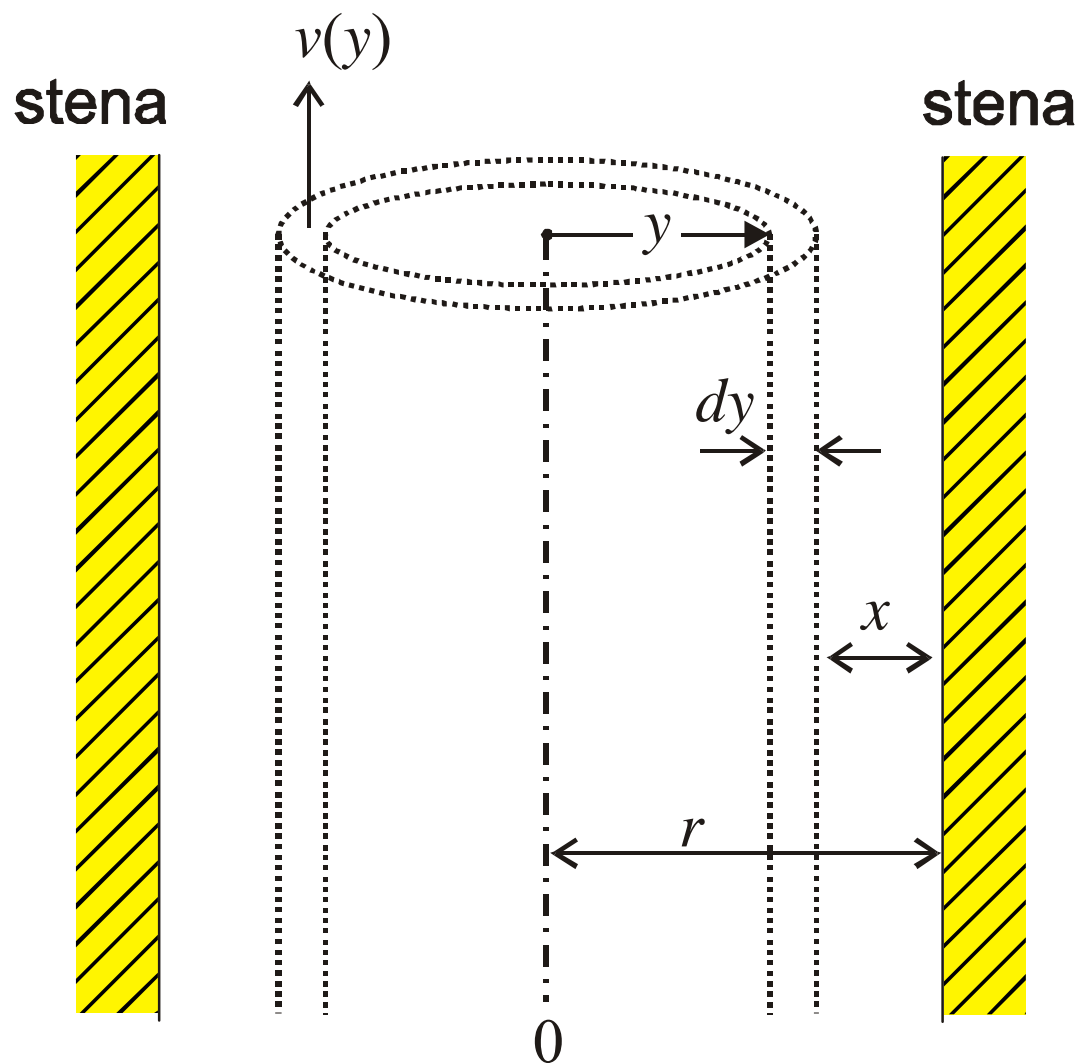
$$\epsilon := 78 : \epsilon_0 := 8.85e-12 : \zeta := 0.1 :$$

$$x_D := 2e-8 : E_z := -1 : \eta := 0.0009 :$$

$$R(\text{kapilare}) > 10^{-7} \text{ m} \rightarrow I_{\text{tot}} = 4 \cdot 10^{-13} \text{ A}$$

Strujni tok

(tok zaradi gibanja tekočine v kapilari)



Poiseuille-jeva enačba

$$v(y) = \frac{p(r^2 - y^2)}{4\eta l}$$

p – tlak

l – dolžina kapilare

$$I_s = \int_0^r v(y) \rho(y) 2\pi y dy$$

Poissonova enačba

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

Strujni tok, potencial

$$y = r - x; \quad r^2 \gg rx \gg x^2$$

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{\pi r^2 p}{\eta l} \int_r^0 x \rho(x) dx = \\ &= -\frac{\pi r^2 p}{\eta l} \int_r^0 x \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx = \\ &= -\frac{\pi r^2 \varepsilon \varepsilon_0 p}{\eta l} \int_0^\zeta d\phi \end{aligned}$$

$$I_s = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta}{\eta l} \pi r^2 p$$

Tipične vrednosti:

$$\varepsilon - 78$$

$$\zeta - 0.1 \text{ V}$$

$$r - 0.5 \text{ mm}$$

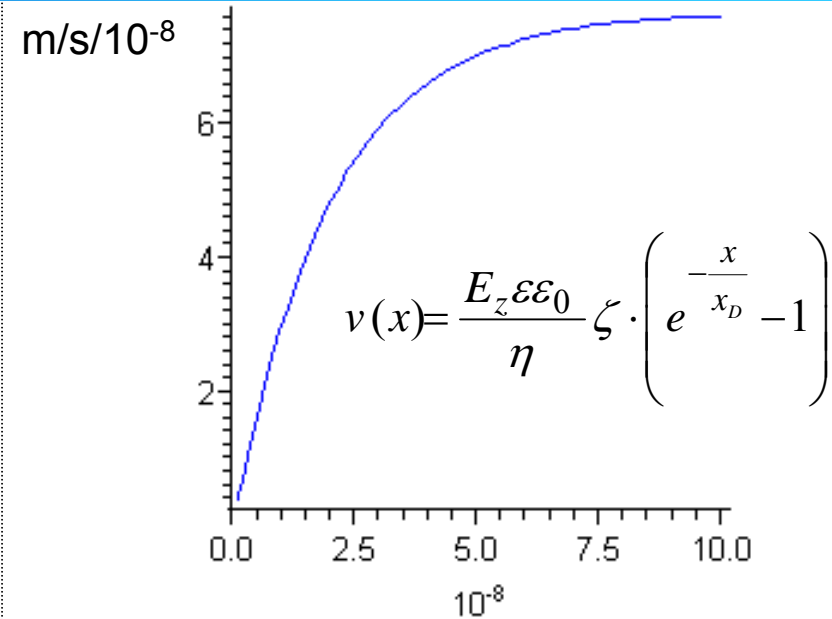
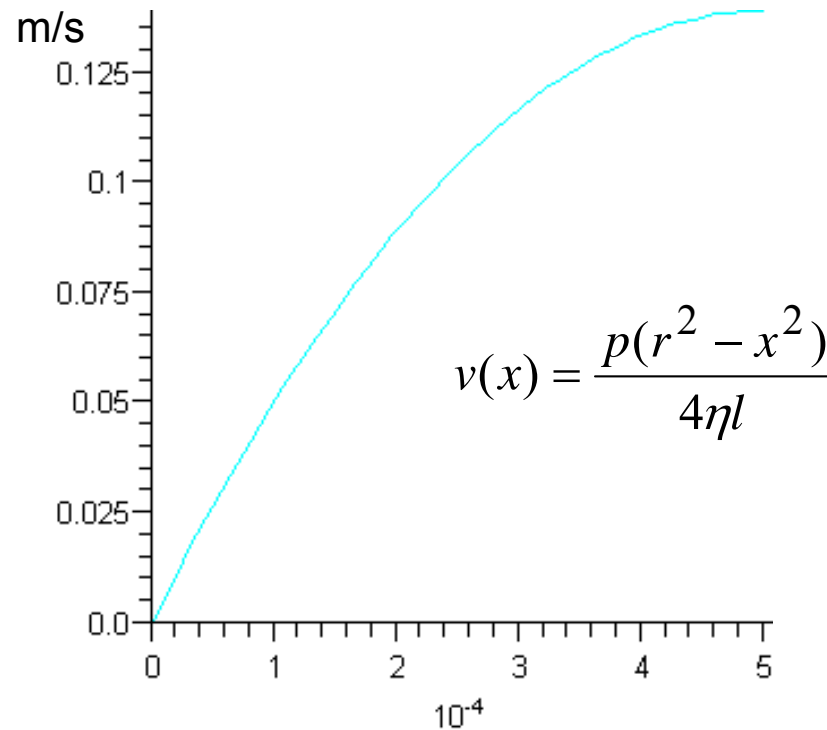
$$p - 10^3 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\eta - 0.001 \text{ Ns/m}^{-2}$$

$$l - 50 \text{ cm}$$

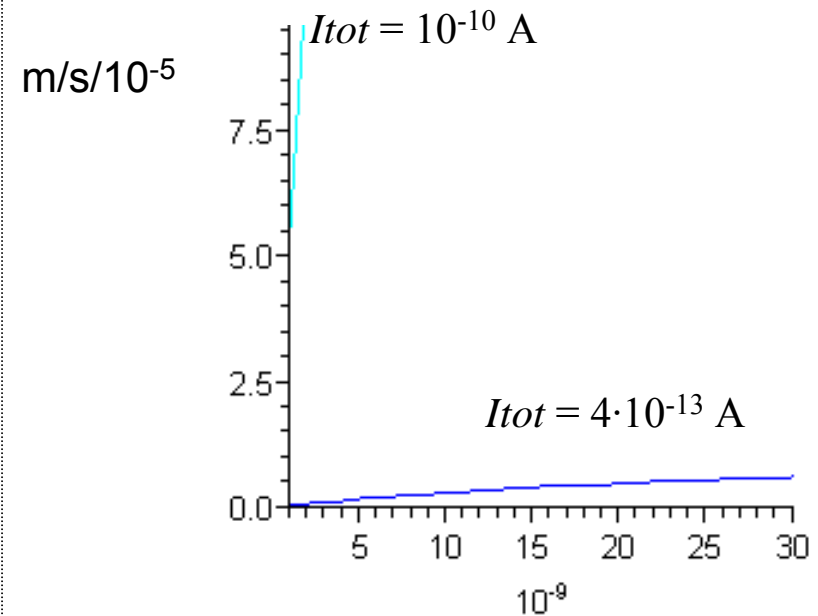
$$I_s = 10^{-10} \text{ A}$$

Strujni tok, potencial

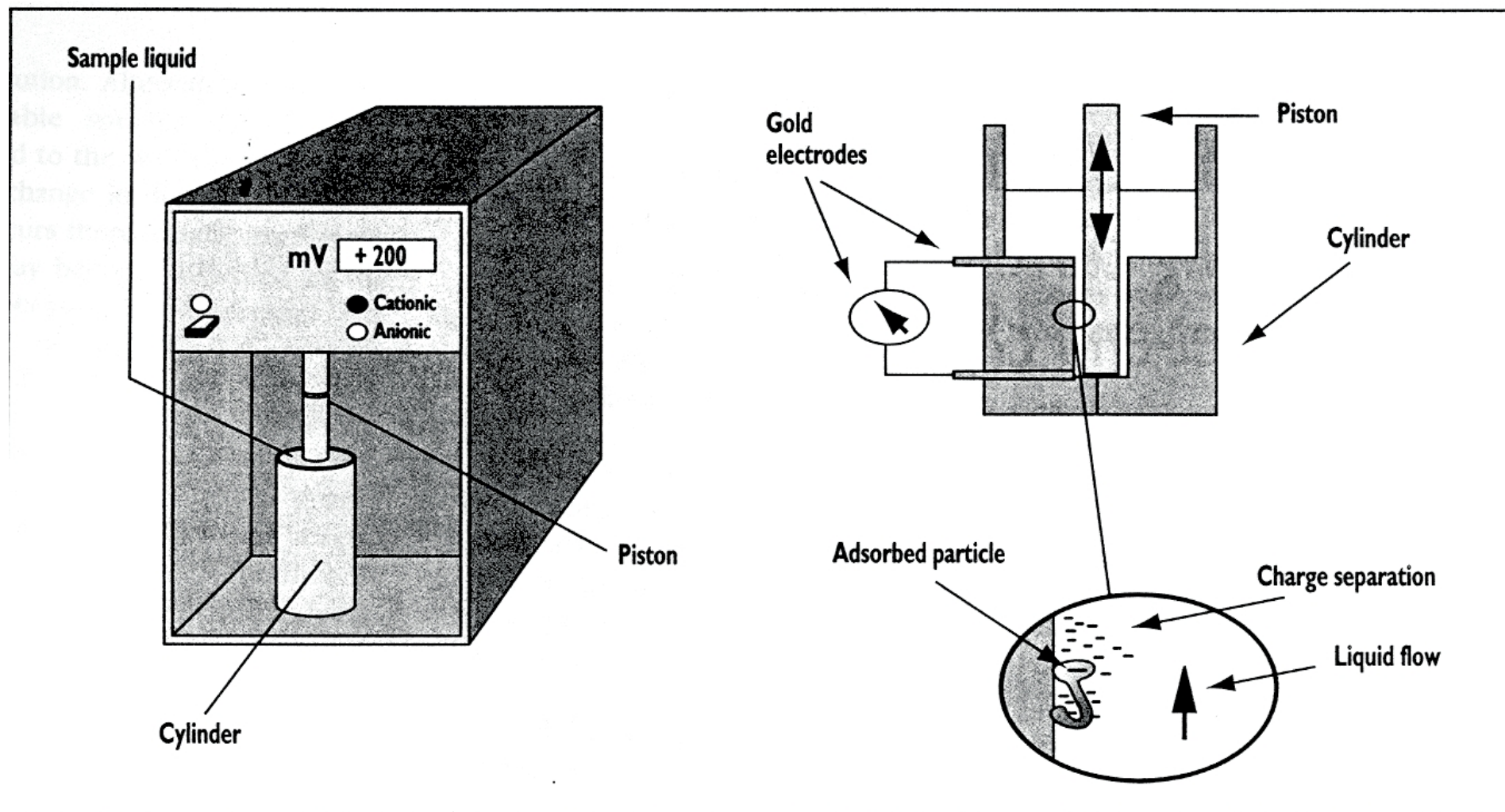


$l := 0.5 : p := 1e3 : r := 5e-4 :$

Tlak, ki vodi do enakosti: ca. 3 Pa
(0.3 mm H₂O stolpca)

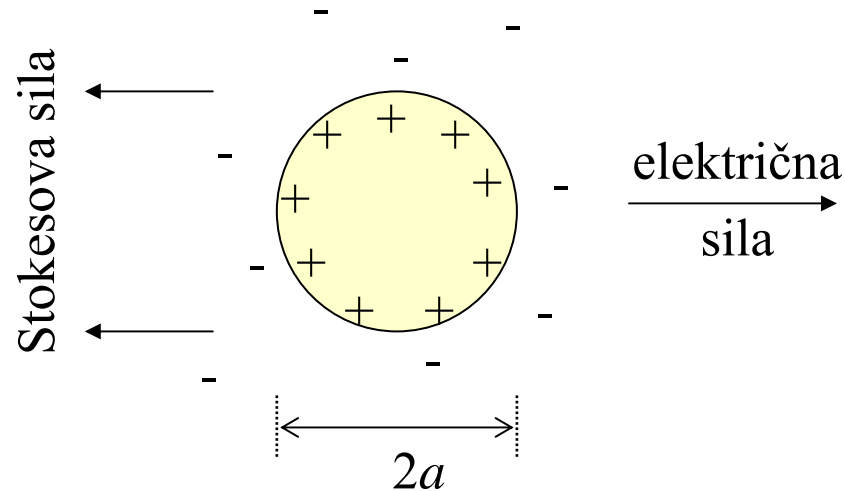


Merjenje strujnega potenciala



Elektroforeza

Gibanje nabitih trdnih delcev v zunanjem električnem polju



$$QE_z = 6\pi\nu a\eta$$

Električna sila Stokesova sila

Elektroforetska mobilnost:

$$\frac{v}{E_z} = \frac{Q}{6\pi\nu a\eta} \leftarrow ?$$

$$Q = -\int_a^\infty 4\pi r^2 \rho dr$$

Naboj delca je nasprotno enak naboju "oblaka"

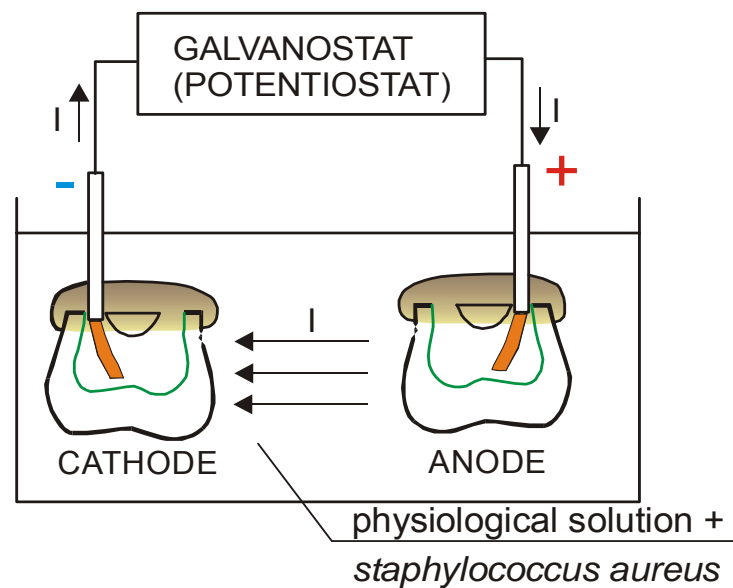
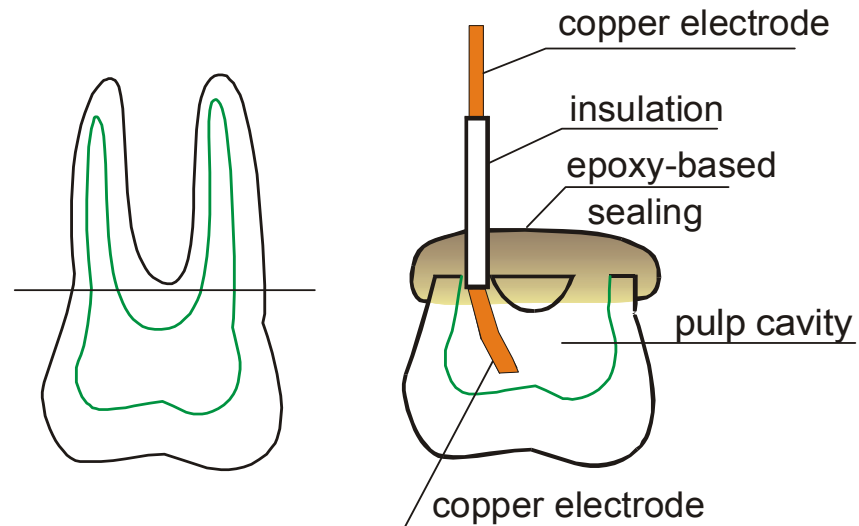
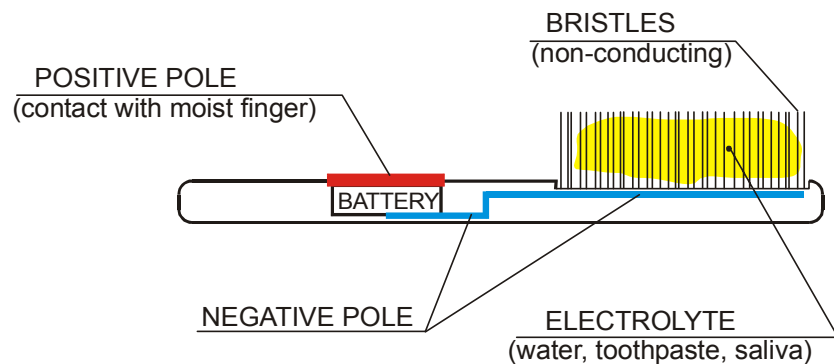
$$\frac{v}{E_z} = -\frac{2\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{3\eta} \left(1 + \frac{a}{x_D}\right)$$

Poisson-Boltzmannova enačba za sferne koord.

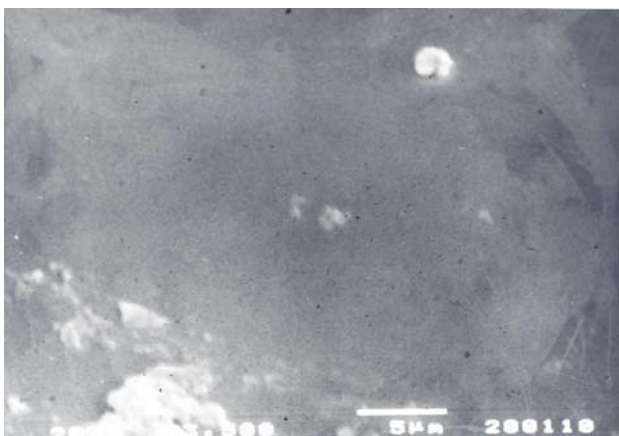
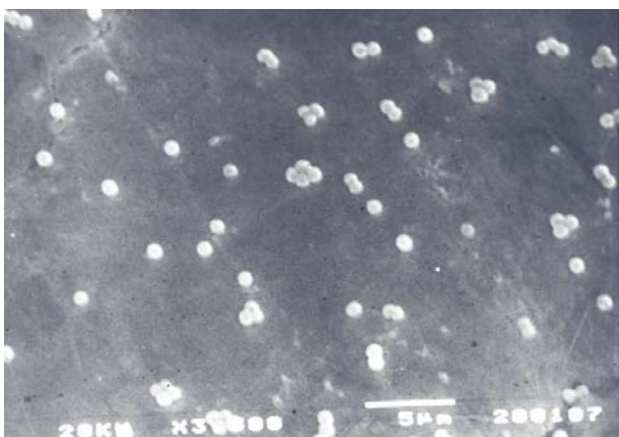
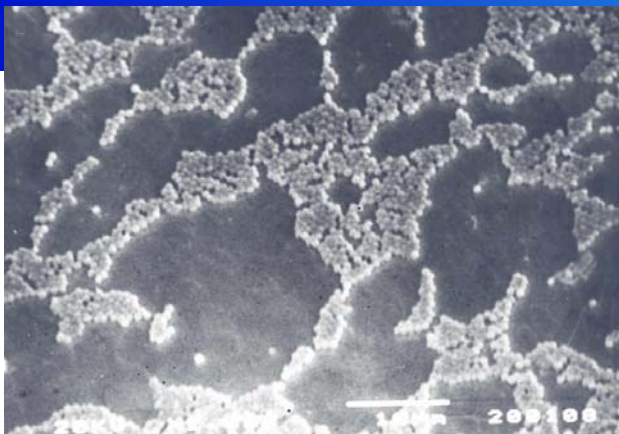
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_i z_i F c_i^0 \exp\left(\frac{-z_i F \phi}{RT}\right) \longrightarrow \phi = \phi_s a \frac{\exp\left(-\frac{r-a}{x_D}\right)}{r}$$

Elektroforeza

Ionska ščetka = elektroforetska ščetka



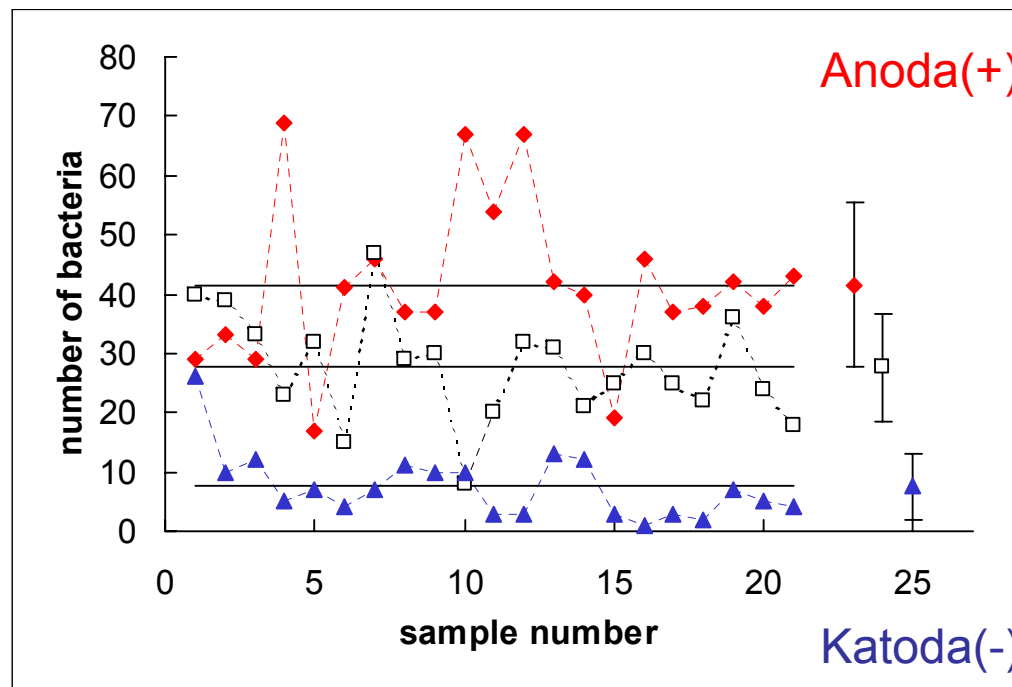
Elektroforeza



Anoda (+)

- $I = 50 \mu\text{A}$
- $t = 2 \text{ minuti}$
- opazovana površina pod mikroskopom: $800 \mu\text{m}^2$

Referenčni zob



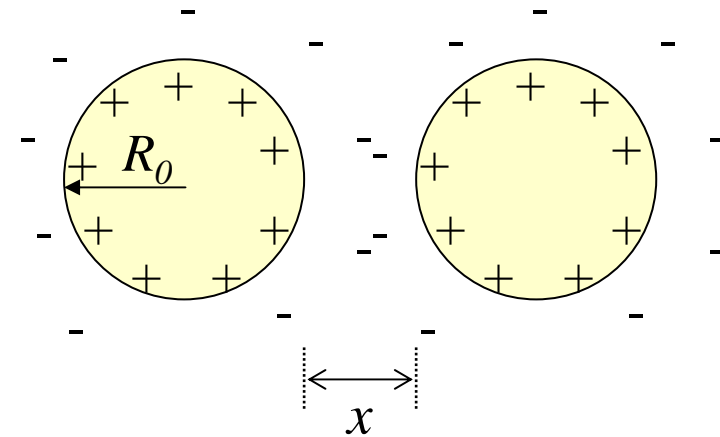
Katoda (-)

Stabilnost koloidov - teorija DLVO

(Derjaguin, Landau, Verwey, Overbeek)

Elektrostatska potencialna energija pri prekrivanju difuznih slojev dveh sfernih delcev ($zF\phi \ll RT$):

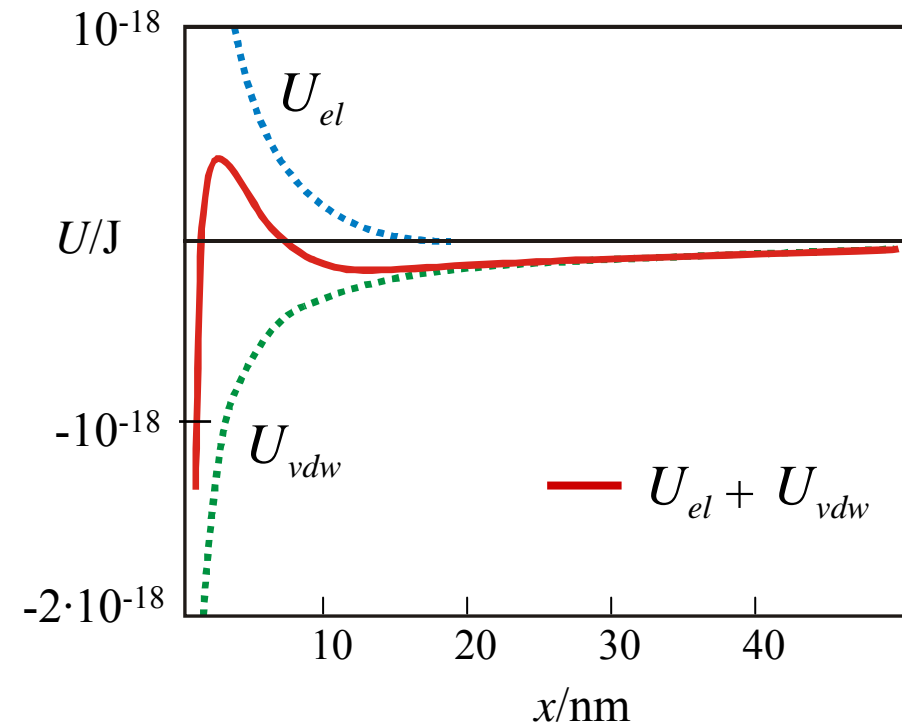
$$U_{el} = 2\pi R_0 \varepsilon \varepsilon_0 \phi_0^2 \exp\left(-\frac{x}{x_D}\right)$$



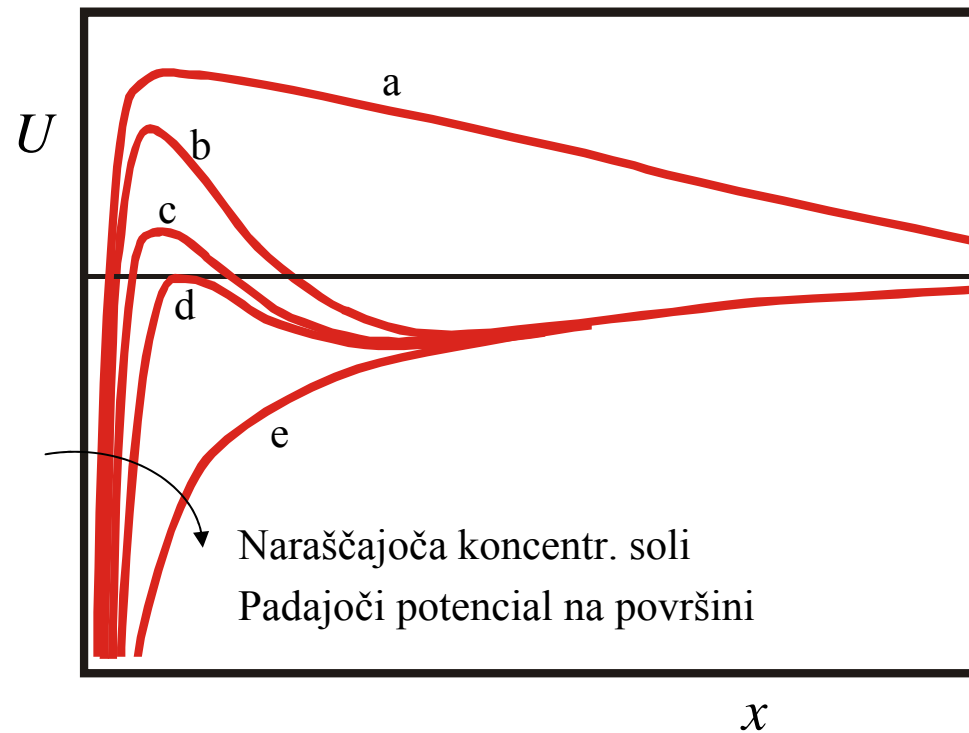
Van der Waalsova energija med koloidnimi sferami

$$U_{vdw} = -\frac{AR_0}{6x}$$

ϕ_0 – potencial na površini krogel
 x_D – Debyejeva dolžina
 A – Hamakerjeva konstanta ($5-50 \cdot 10^{-20} \text{J}$)



Stabilnost koloidov-teorija DLVO



a) Močan elektrostatski odboj koloidov

b) V sekundarnem minimumu dosežejo delci ravnotežje; kinetična stabilnost

c) Počasna koagulacija – minimum preveč plitek

d) Kritična koncentracija za koagulacijo 10^{-18}

$$A := 10e-20 : R0 := 1e-7 : eps := 78 : eps0 := 8.85e-12 : f0 := 0.1 :$$

$$xD := 6e-9 :$$

$$xD := 2e-9 :$$

$$xD := 1.2e-9 :$$

$$xD := 1e-9 :$$

$$xD := 5e-10 :$$

